

混合粒径土砂のオイラー型堆積モデル

広島大学 内田龍彦

発表内容

交換層は必要か？

混合粒径連続式の導出と侵入可能空隙率 λ_i (available porosity) の導入

二粒径充填実験結果による侵入可能空隙率 λ_i (available porosity) の定式化

二粒径充填モデルの現地河床材料への適用性の検証

二粒径充填モデルの混合粒径土砂への拡張と検証

有限厚さの場合への適用と河床高の計算方法

交換層(平野, 1971)について

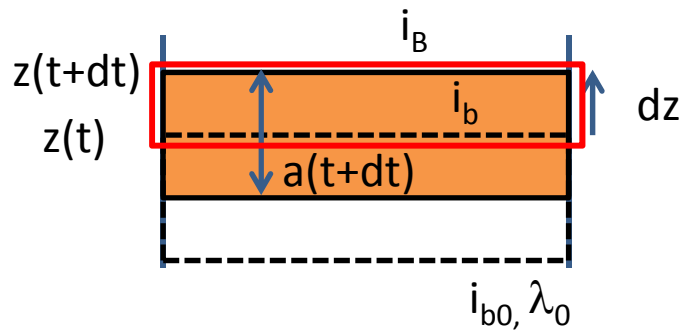
河床上昇時

河床高

$$(1-\lambda)B \frac{\partial z}{\partial t} - aB \frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\partial q_B B}{\partial x}$$

粒径分布

$$a(1-\lambda)B \frac{\partial i_b}{\partial t} = -\frac{\partial i_B q_B B}{\partial x} + i_b \frac{\partial q_B B}{\partial x}$$

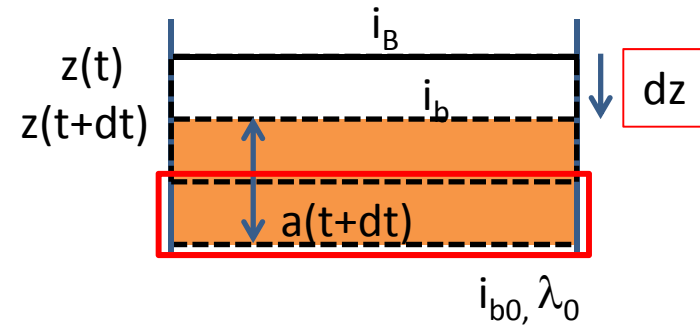


下降時

$$(1-\lambda_0)B \frac{\partial z}{\partial t} - aB \frac{\partial \lambda}{\partial t} - (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\partial q_B B}{\partial x}$$

$$a(1-\lambda)B \frac{\partial i_b}{\partial t} = -\frac{\partial i_B q_B B}{\partial x} - i_{b0} \frac{\partial q_B B}{\partial x}$$

$$+ (i_b - i_{b0})aB \frac{\partial \lambda}{\partial t} - B \frac{\partial a}{\partial t}$$

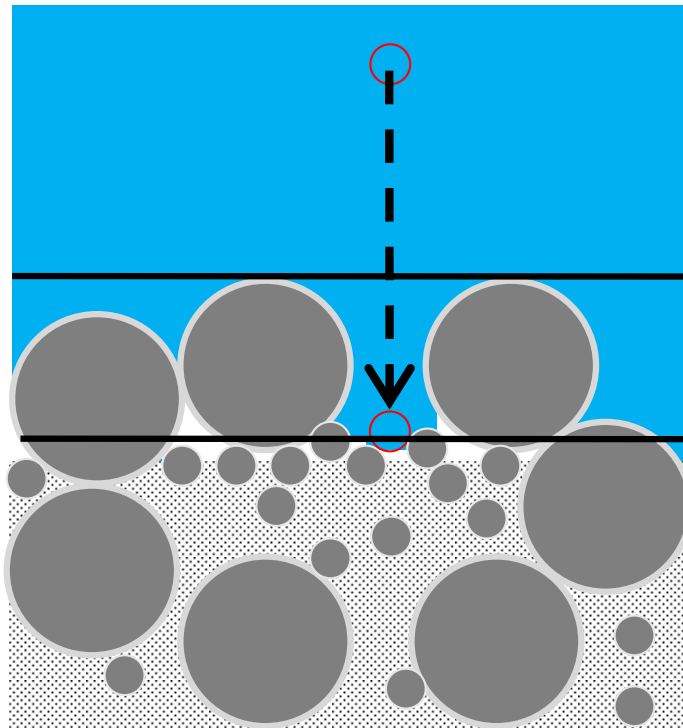


課題と疑問など

- ・ 解の交換層厚依存
 - ・ 空隙率の与え方
 - ・ 上昇時と下降時で式が異なることの是非
- ⇒ 微分方程式の導出時に風上差分が導入されている

交換層とは何か？

粒子が静的条件で河床に堆積するとき、交換層は定義できない
＝少なくともこの条件で交換層の概念が適用できない



河床高
交換層

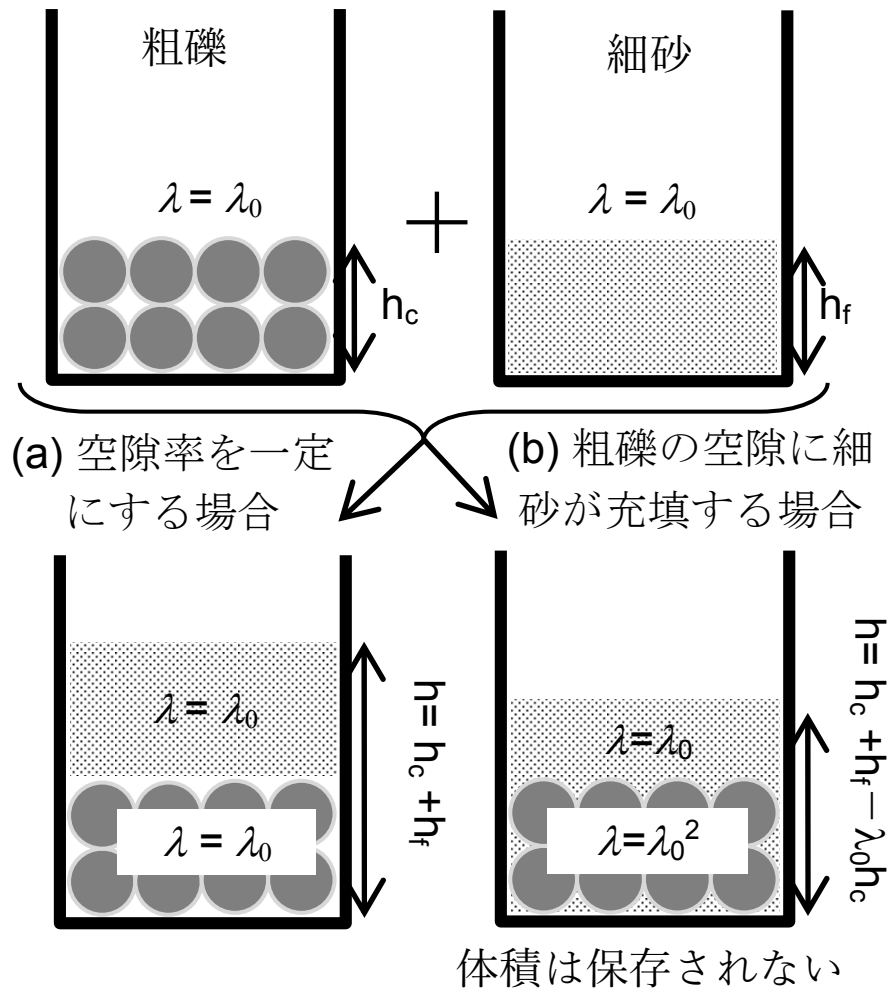
貯留層



個別要素法を用いた解析では交換層を定義しなくても解析可能である

＝方程式は同一のはずなので、オイラー型でも交換層を定義せずに解析可能なはずである

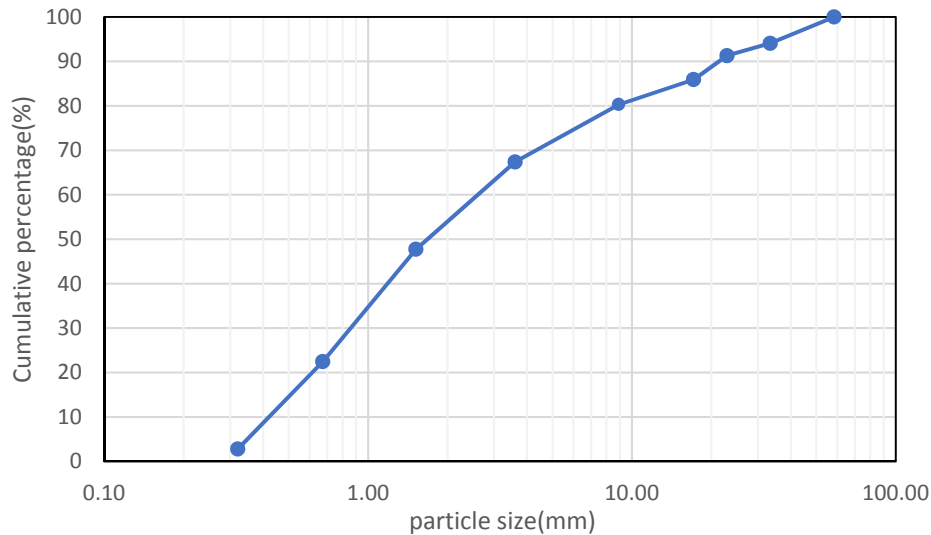
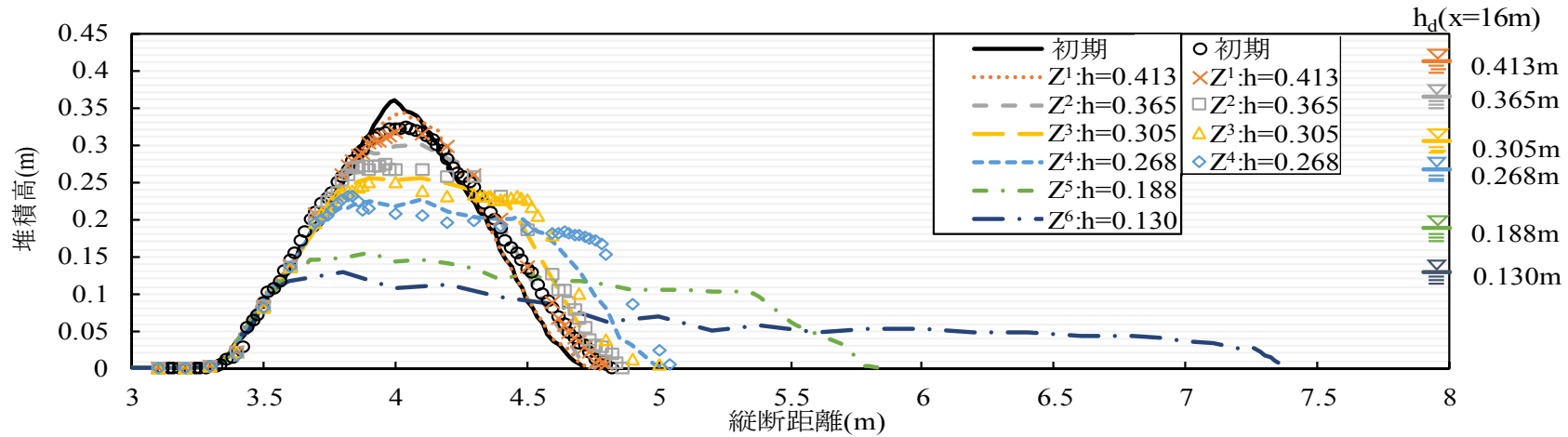
粒度分布による土砂体積変化の例



洪水時の多量の砂の堆積（上流河川の内岸など）は空隙を構成していたものでないか？

土石流などの混合された土砂が河川に供給されると分級作用によって体積は変化する

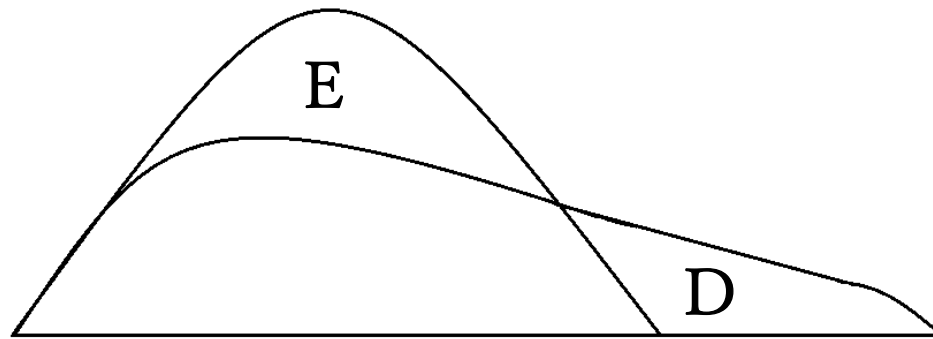
流れによる土砂堆積の変化に関する実験



D50(mm)	D84(mm)	D16(mm)	D84/D16
2.21	13.66	0.56	24.39

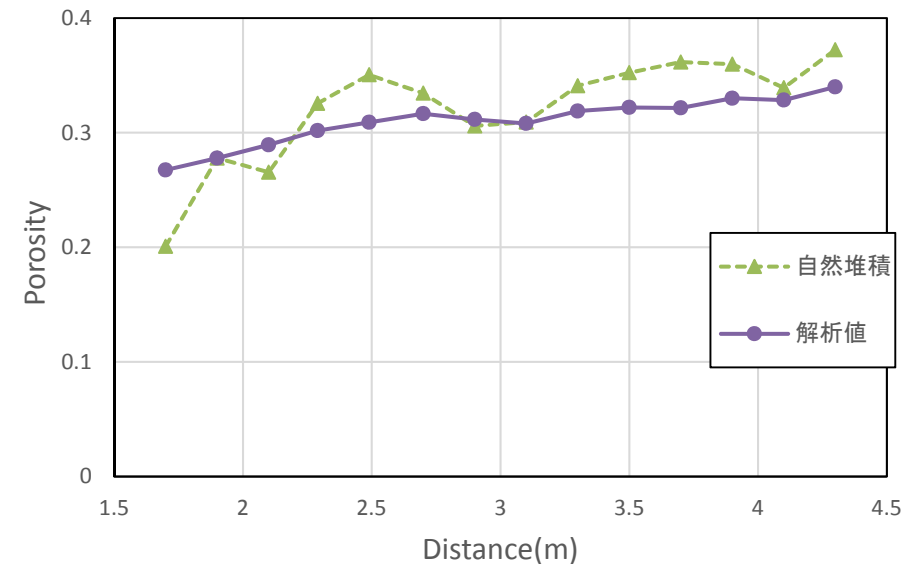
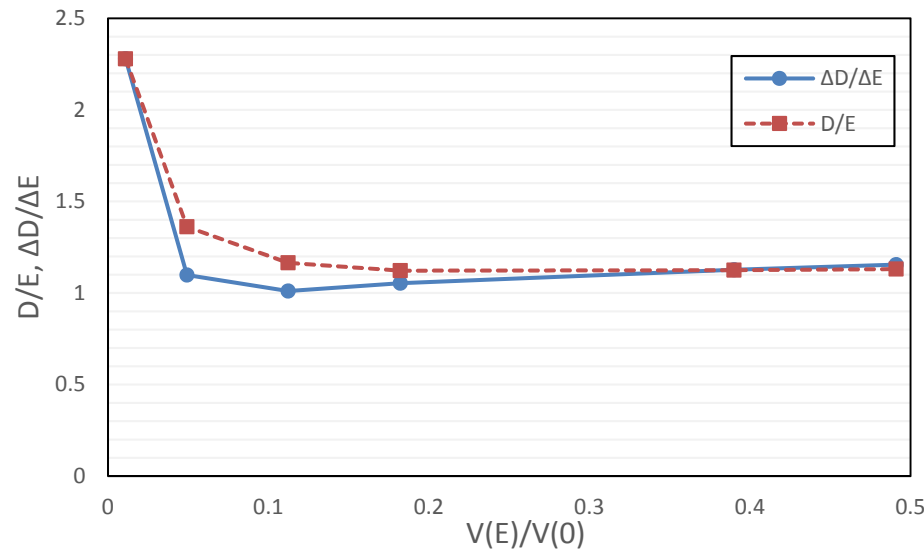
流量	0.020m ³ /s
初期水深	56cm
水路床	固定床
河床勾配	0
水温	6.5°C

分級作用による土砂堆積量の増大



最終的に堆積土砂量は侵食土砂量の**約1.1倍**に収束した。

空隙率は水流による分級作用で**流下方向に大きくなる**。



1. 1倍は実験の狭い粒度分布から得られたというだけでなく、分母は土砂流入量だけでなく、河床の移動する土砂すべてであると考え、堆積変化の影響はかなり大きいのでは？

目的

混合粒径の河床変動解析に必要な流砂の連続式を導出し、その妥当性を検証すること

交換層は必要か？



混合粒径連続式の導出と侵入可能空隙率 λ_i (available porosity) の導入

二粒径充填実験結果による侵入可能空隙率 λ_i (available porosity) の定式化

二粒径充填モデルの現地河床材料への適用性の検証

二粒径充填モデルの混合粒径土砂への拡張と検証

粒子の堆積高と空隙率の時間変化を表す方程式の導出

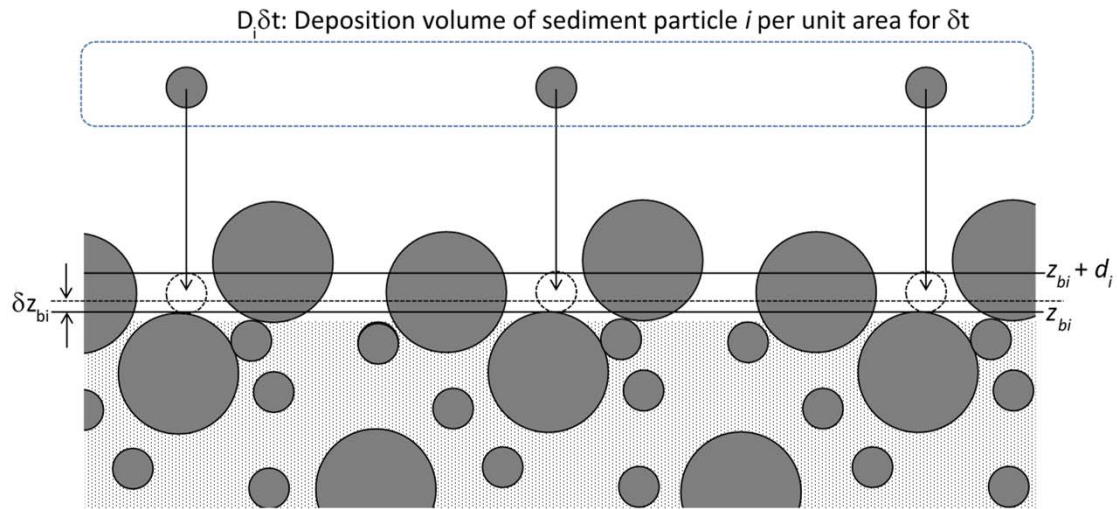
$$D_i = \frac{\partial q_{bix}}{\partial x} + \frac{\partial q_{biy}}{\partial y}$$

河床における変化量

$$d_i \delta P_i = \delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{z_{bi}}^{z_{bi}+d_i} p_i dz \right) = \delta t \left(\int_{z_{bi}}^{z_{bi}+d_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} dz - (p_i)_{z_{bi}} \frac{\partial z_{bi}}{\partial t} \right)$$

$$= \delta t D_i - (p_i)_{z_{bi}} \delta z_{bi}$$

堆積土砂量 堆積高下面における土砂割合



z_{bi} : Deposition height of sediment particle i below which the particle cannot go through

$z_{bi} \sim z_{bi} + d_i$: The range in which the occupancy fraction of particle i can be varied

δz_{bi} : The variation in the deposition height z_{bi} for δt

侵入可能空隙率 λ_i (available porosity) の導入

$$d_i \delta P_i = \delta t D_i - (p_i)_{z_{bi}} \delta z_{bi}$$

粒子の最大の存在割合 P_i は充填状態として $\lambda_i(1 - \lambda_0)$ で与える. ここに, λ_i は i 粒子の侵入可能空隙である.

上式に $(p_i)_{z_{bi}} = \lambda_i(1 - \lambda_0)$, $\delta P_i = 0$ を代入すると, 充填状態の方程式が得られる

未充填状態においては存在比率が変化し, 堆積高は変化しないとおけるので, 堆積過程における二つの式は,

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{bi}}{\partial t} = \frac{D_i}{\lambda_i(1 - \lambda_0)}, & \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0 \quad (\text{充填状態: } P_i = \lambda_i(1 - \lambda_0)) \\ \frac{\partial z_{bi}}{\partial t} = 0, & \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{D_i}{d_i} \quad (\text{未充填状態: } P_i < \lambda_i(1 - \lambda_0)) \end{cases}$$

堆積高と空隙率に関する方程式

堆積量 D_i が負の時を考えると、以下の三つの状態で定式化できる

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial z_{bi}}{\partial t} = \frac{D_i}{\lambda_i(1 - \lambda_0)}, & \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0 \quad (\text{充填状態: } P_i = \lambda_i(1 - \lambda_0)) \\ \frac{\partial z_{bi}}{\partial t} = 0, & \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{D_i}{d_i} \quad (\text{未充填状態: } P_i < \lambda_i(1 - \lambda_0)) \\ \frac{\partial z_{bi}}{\partial t} = \frac{D_i}{\lambda_i(1 - \lambda_0)}, & \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0 \quad (\text{空状態: } P_i = 0) \end{array} \right.$$

任意の厚さ Δ における空隙率は上の式から解かれる各粒径の存在率を用いて、

$$\lambda = 1 - \sum_k \left(\frac{1}{\Delta} \int_z^{z+\Delta} p_i dz \right) \quad \text{or} \quad \lambda = 1 - \frac{1}{\Delta} \int_z^{z+\Delta} \int_0^\infty p(s) ds dz$$

以上より、侵入可能な空隙率 λ_i が計算できれば、新たな厚さを定義せずに河床材料に関する連続式(質量保存式)が解ける



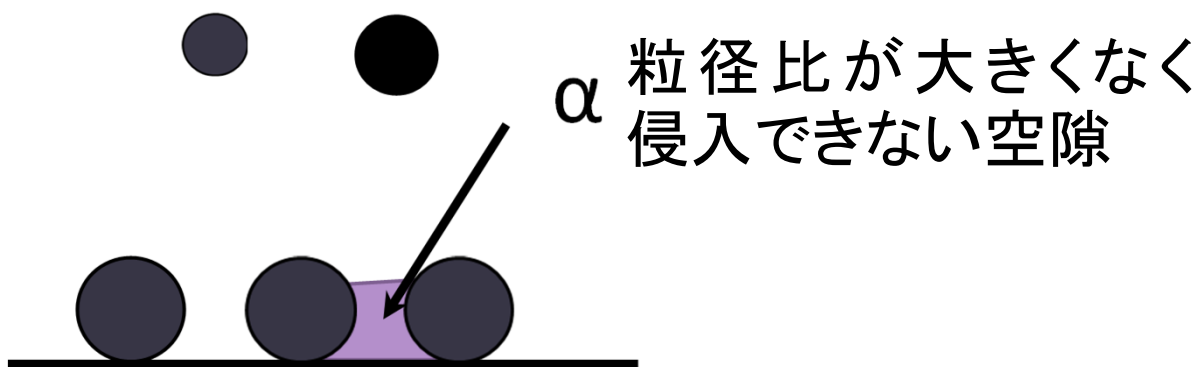
二粒径充填実験結果による侵入可能空隙率 λ_i (available porosity) の定式化

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_{bi}}{\partial t} = \frac{D_i}{\lambda_i(1 - \lambda_0)}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0 \quad (\text{saturated condition: } P_i = \lambda_i(1 - \lambda_0)) \\ \frac{\partial z_{bi}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{D_i}{d_i} \quad (\text{unsaturated condition: } P_i < \lambda_i(1 - \lambda_0)) \\ \frac{\partial z_{bi}}{\partial t} = \frac{D_i}{\lambda_i(1 - \lambda_0)}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0 \quad (\text{empty condition: } P_i = 0) \end{array} \right.$$

二粒径充填問題の定式化

細粒子の侵入可能な空隙を，粗粒子の存在割合を用いて以下のように表す

$$\lambda_f = 1 - \alpha P_c$$



$$\alpha = 1 + \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} \gamma^{C_2} (1 - \beta)^{C_1}$$

$$\beta = (1 - \gamma) \left(1 - \frac{P_c}{1 - \lambda_0} \right)$$

$$\gamma = \min \left(C_3 \frac{d_f}{d_c}, 1 \right)$$

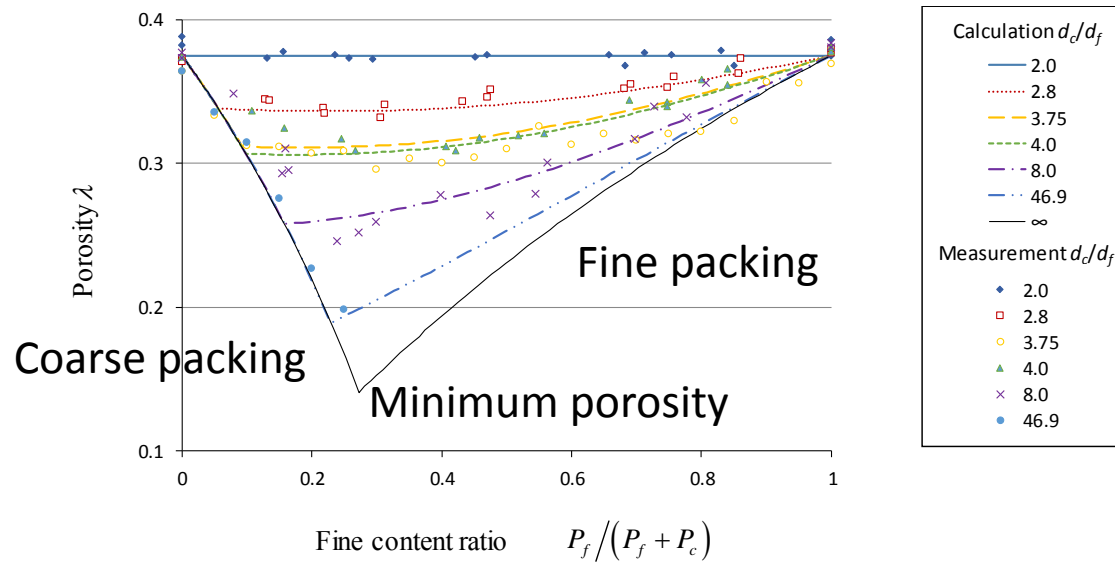
係数 α の制約条件

$$\alpha \rightarrow 1 \text{ as } d_c/d_f \rightarrow \infty$$

$d_c/d_f = 1$: 一様粒径. 粗粒子が充填していれば細粒子の空隙がゼロ

λ_0 : 一様粒径の空隙率. ※ 粒径の関数とも考えられるが, 後の現地材料を用いた実験より, 本研究では簡単のため一定値と考える

二粒径充填式の解の性質



$$\lambda = 1 - P_c - P_f$$

$$\lambda_f = 1 - \alpha P_c$$

The above binary packing formula exhibits two packing processes on either side of the closest condition: fine packing on the right side and coarse packing on the left side (Koltermann and Grelick, 1995).

Fine packing process: the coarse particles are buried dispersedly in the fine particle aggregate. Because the fine particles use all the available porosity for a given coarse particle volume fraction P_c , the fine particle volume fraction P_f of the closest packing for this process is calculated as

$$P_f = (1 - \alpha P_c)(1 - \lambda_0)$$

Coarse packing process: the process where the fine particles infiltrate into the gaps between the coarse particles that are in the closest packing condition. Substituting $P_c = 1 - \lambda_0$ gives the porosity for this process.

Minimum porosity: Adding the constraint condition of the equation of fine packing process equation into the coarse packing condition gives an equation for the porosity at the intersection point between the coarse and fine packing process lines, λ_{min} , which usually provides the closest condition for a given diameter ratio d_c/d_f .

$$\lambda_{min} = \lambda_0^2 + \gamma^{C_2} \cdot \lambda_0(1 - \lambda_0)$$

It is obvious that the above gives the constraint conditions $\lambda_{min} = \lambda_0^2$ for the diameter ratio d_c/d_f approaching infinity with $\gamma = 0$ and $\lambda_{min} = \lambda_0$ as the diameter ratio d_c/d_f is smaller than the minimum value C_3 with $\gamma = 1$

係数による解のパターン

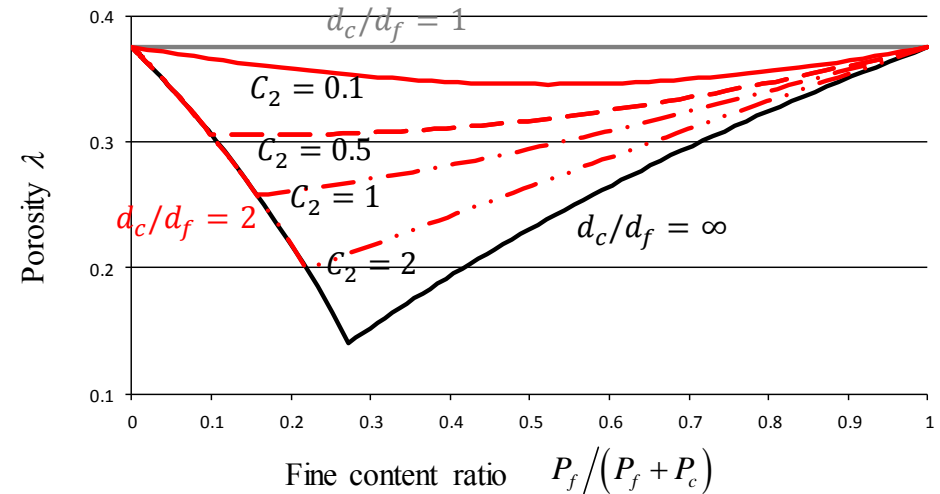
$$\lambda = 1 - P_c - P_f$$

$$\lambda_f = 1 - \alpha P_c$$

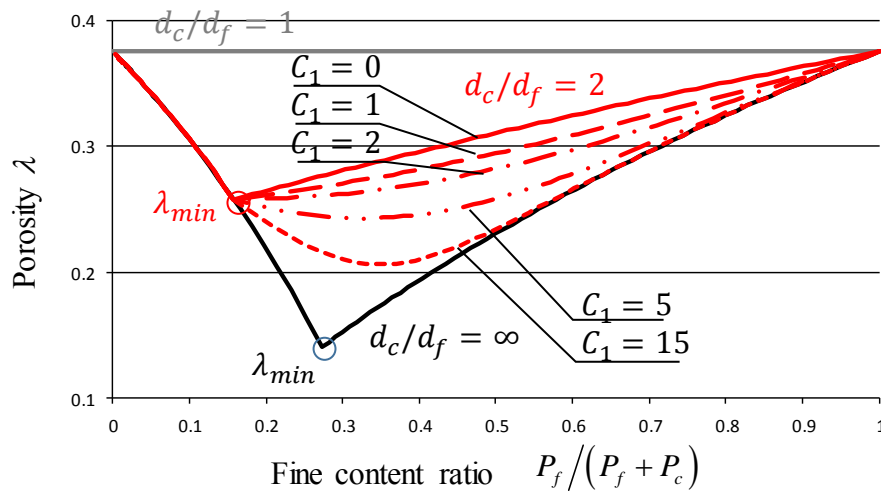
$$\alpha = 1 + \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} \gamma^{C_2} (1 - \beta)^{C_1}$$

$$\beta = (1 - \gamma) \left(1 - \frac{P_c}{1 - \lambda_0} \right)$$

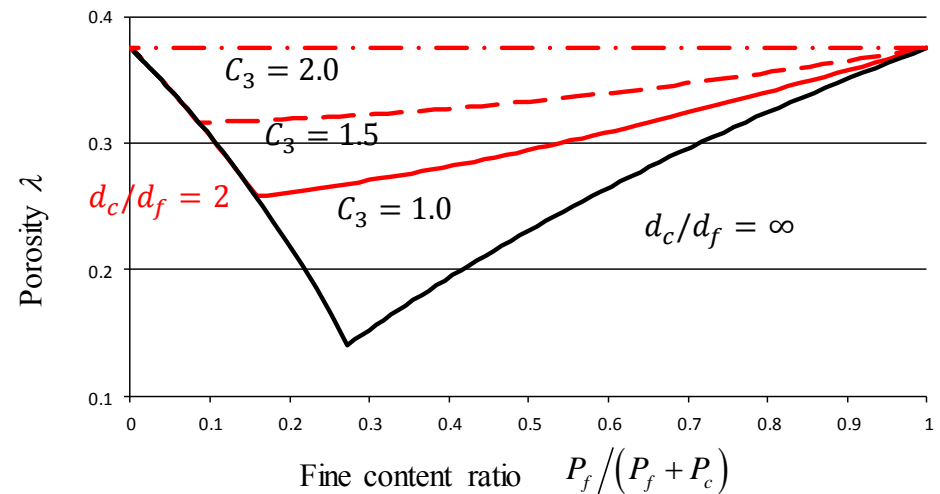
$$\gamma = \min \left(C_3 \frac{d_f}{d_c}, 1 \right)$$



(b) Variation in C_2 with $C_1=C_3=1$

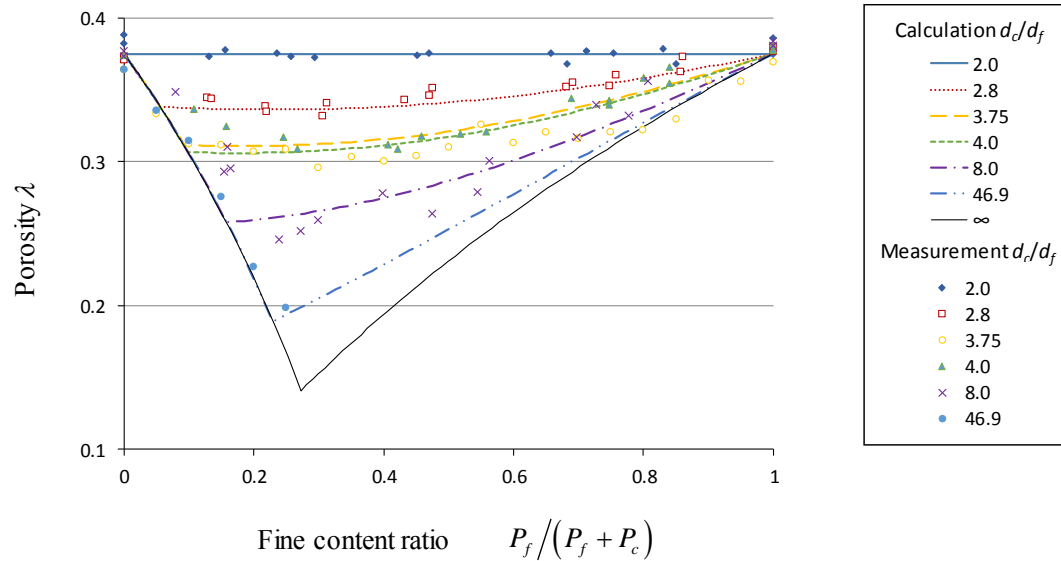


(a) Variation in C_1 with $C_2=C_3=1$

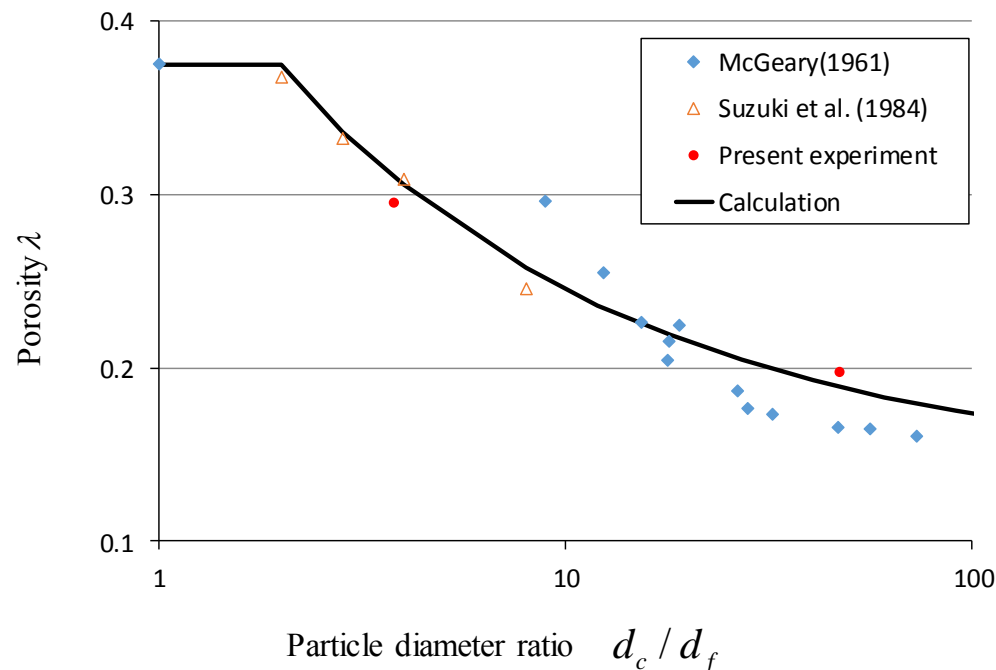


(c) Variation in C_3 with $C_1=C_2=1$ ¹⁵

二粒径の球充填問題による係数の同定



Comparison between calculation results using the present binary packing formula (equations (1), (2), and (4)–(6) with $C3=0.5$, $C1=1$, and $C2=2$) and measurement results with binary spheres. The numbers in the legend show the diameter ratio d_c/d_f . The measurement results include random packing experimental results obtained by Suzuki et al. (1984) for $d_c/d_f=2.0, 2.8, 4.0,$ and 8.0 , while the porosity variations for $d_c/d_f=3.75$ and 46.9 were measured with the closest packing condition in this study.





二粒径礫への適用

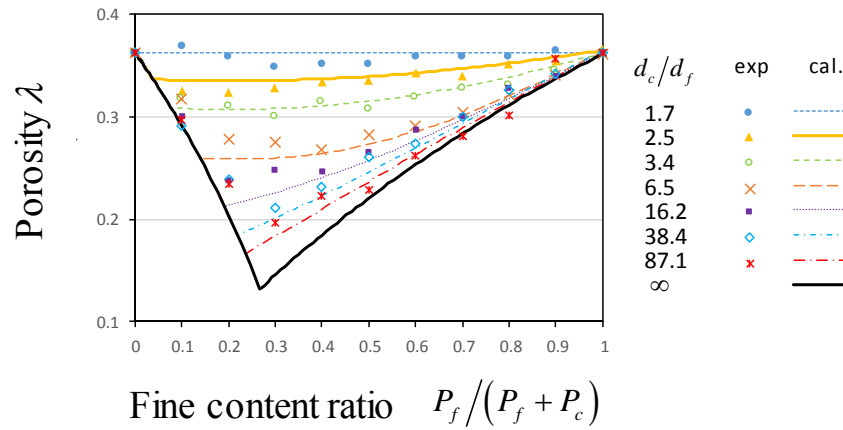
Table 1. Sediment sample data from the Nenotani River

Sieve range (mm)	0.42– 0.84	0.84– 2.0	2.0– 4.75	4.75– 9.5	9.5– 19.1	19.1– 25.4	25.4– 38.1	38.1–
Sieve diameter d_s (mm)	0.63	1.42	3.38	7.13	14.3	22.3	31.75	–
Nominal diameter d_n (mm)	0.67*	1.52*	3.61*	8.91	17.14	22.93	33.43	58.36
Shape factor $d_3/(d_1d_2)^{0.5}$	–	–	–	0.55	0.58	0.59	0.54	0.52
Porosity I_0	0.362	0.364	0.363	0.363	0.363	0.365	0.363	0.363

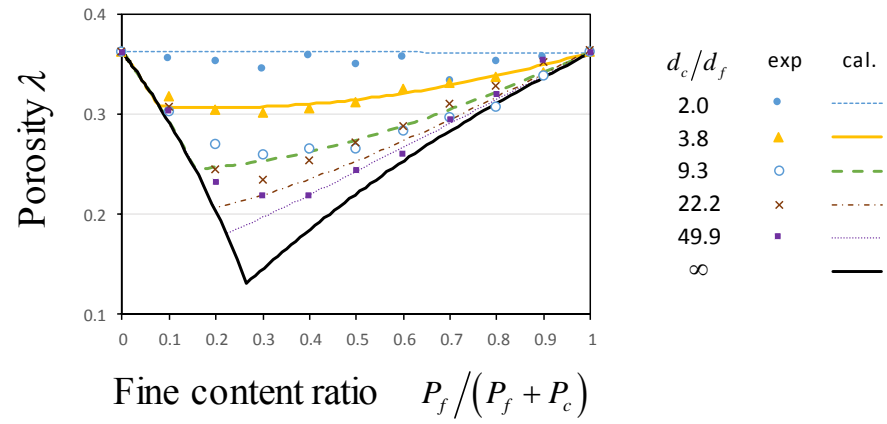
Nominal diameters with * are calculated with sieve diameter and $d_n = d_s / 0.93$.

この粒径範囲では粒径による形や空隙率の違いは見えない...
 一様粒径の空隙率を0.375⇒0.363にして他の係数と同じにして計算¹⁷

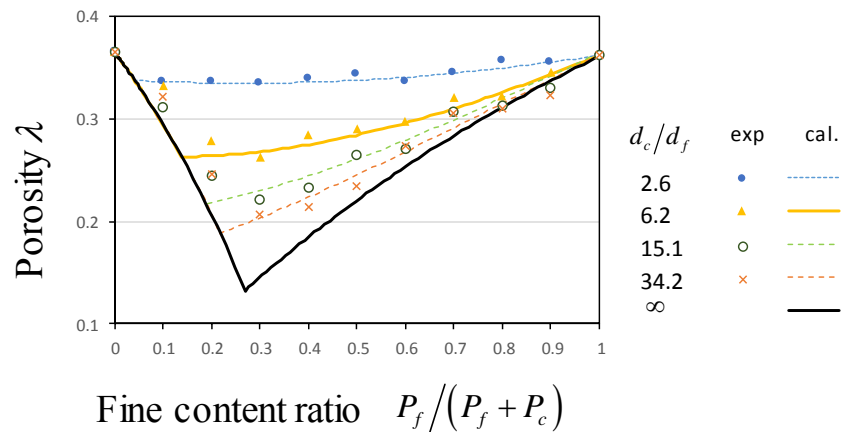
種々の粗粒径による二粒径充填問題



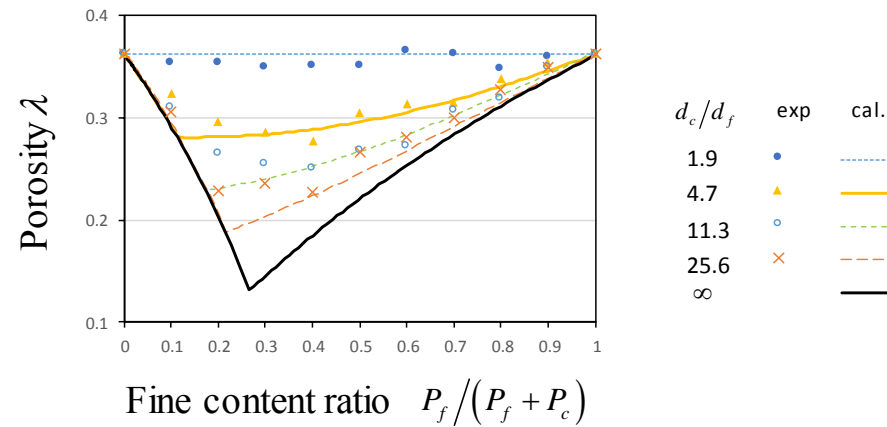
(a) $d_c = 58.36$ mm



(b) $d_c = 33.43$ mm

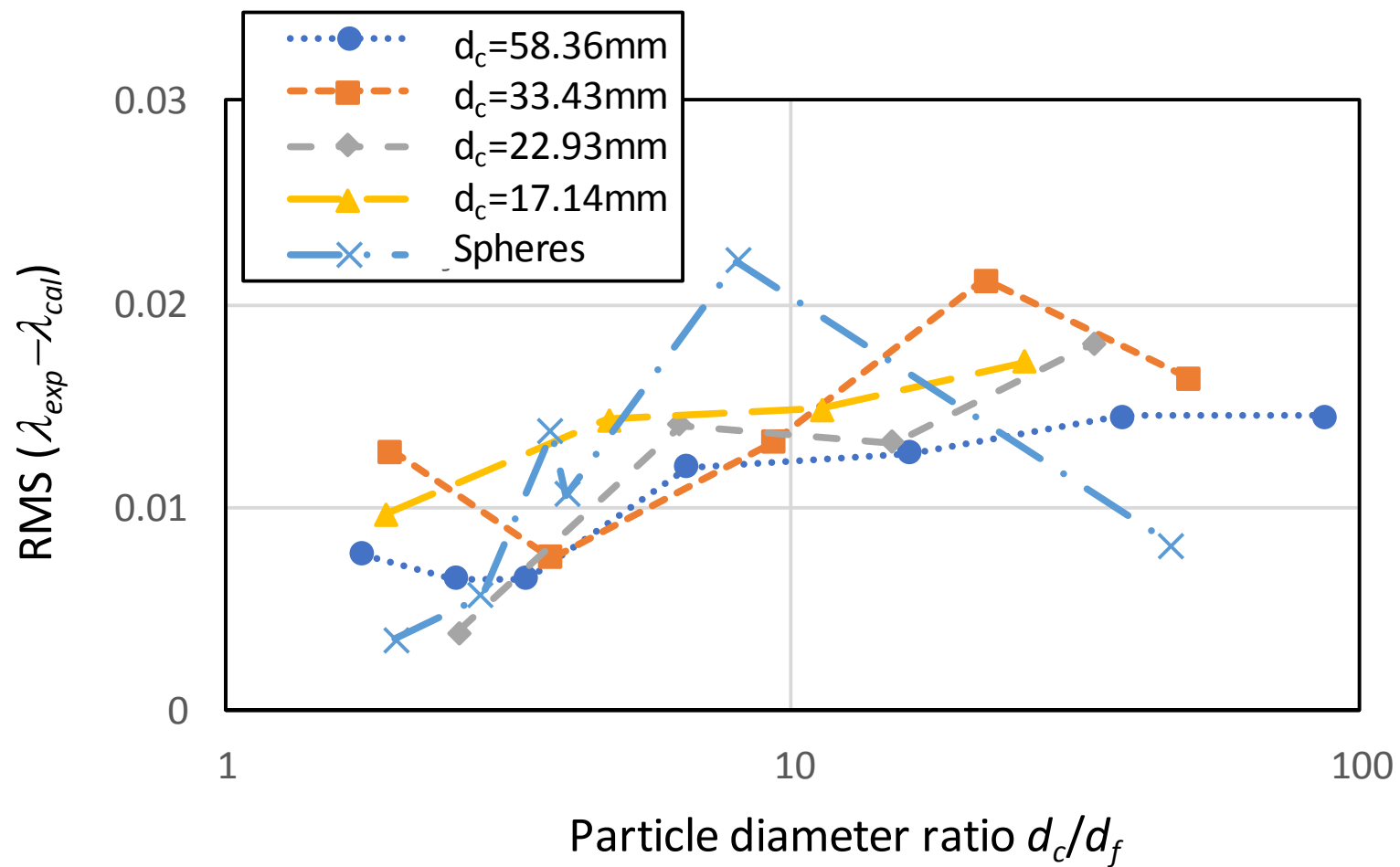


(c) $d_c = 22.93$ mm

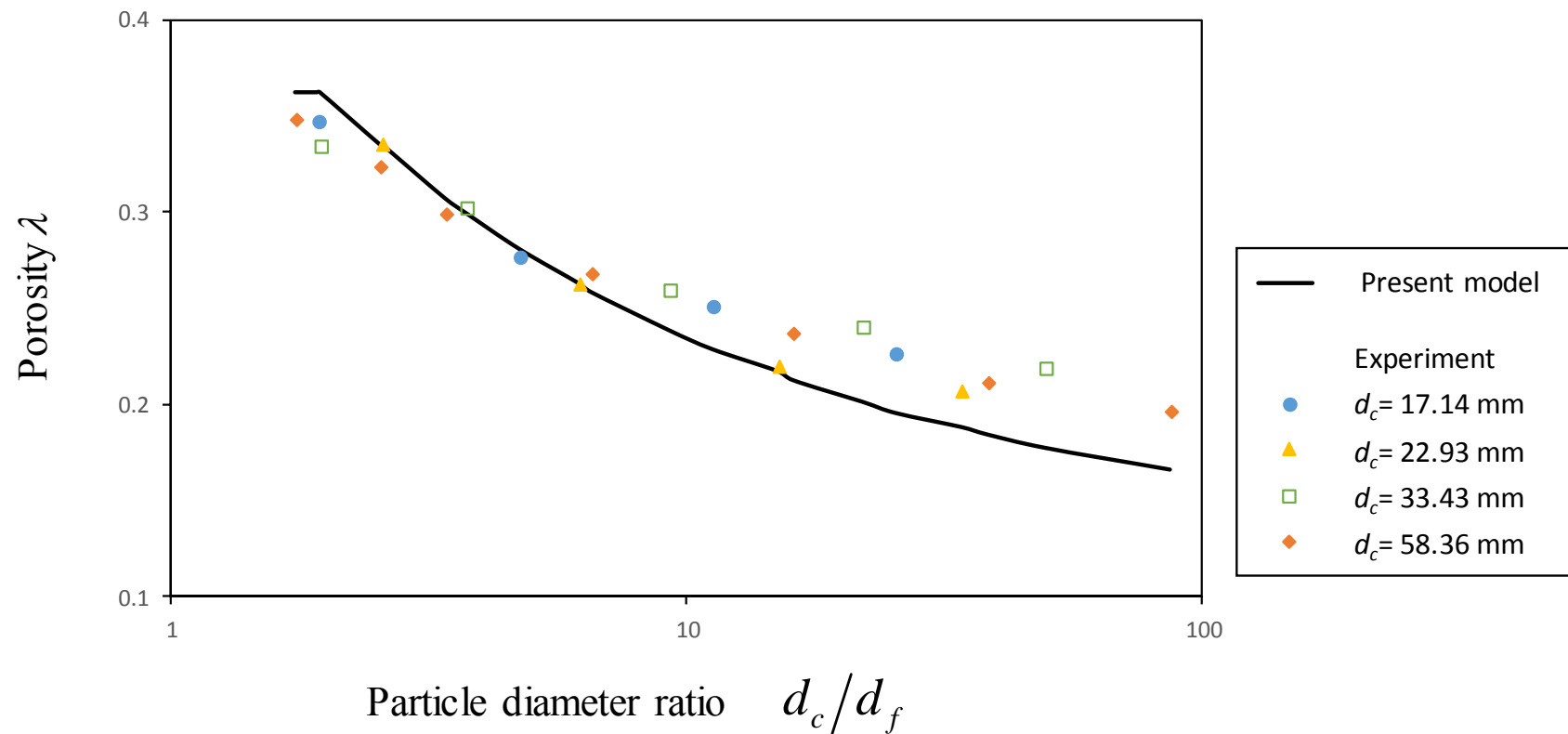


(d) $d_c = 17.14$ mm

二粒径充填式の精度評価



二粒径粒子群の最密状態の空隙率





二粒径充填式の多粒径粒子群における侵入可能空隙率評価への拡張

$$\lambda = 1 - P_c - P_f$$

$$\lambda_f = 1 - \alpha P_c$$

$$\alpha = 1 + \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} \gamma^{C_2} (1 - \beta)^{C_1}$$

$$\beta = (1 - \gamma) \left(1 - \frac{P_c}{1 - \lambda_0} \right)$$

$$\gamma = \min \left(C_3 \frac{d_f}{d_c}, 1 \right)$$



$$\lambda = 1 - \sum_{i=1}^k P_i$$

$$\lambda_{ij} = 1 - \alpha_{ij} P_j$$

$$\alpha_{ij} = 1 + \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} \gamma_{ij}^{C_2} (1 - \beta_{ij})^{C_1}$$

$$\beta_{ij} = (1 - \gamma_{ij}) \left(1 - \frac{P_j}{1 - \lambda_0} \right)$$

$$\gamma_{ij} = \min \left(C_3 \frac{d_i}{d_j}, 1 \right)$$

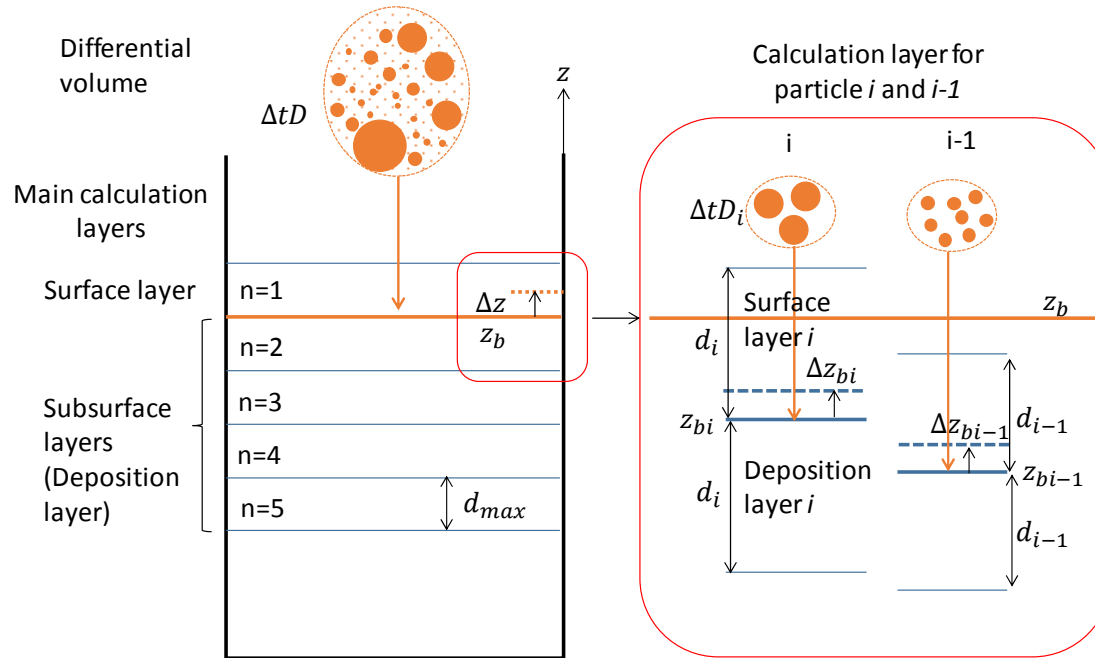
Available porosity

$$\lambda_i = 1 - \sum_{j=i+1}^k \alpha_{ij} P_j = 1 - \sum_{j=i+1}^k (1 - \lambda_{ij})$$

Constrained condition

$$z_{bj} \geq z_{bi} \quad (d_j \geq d_i)$$

数值解析法



Main calculation layer

$$d_{max} \cdot (\Delta P_i)_n = \left\{ (P_i)_{n-1} - (P_i)_n \right\} \Delta z_b + (\Delta t \cdot D_i)_n$$

$$\Delta z_b = \Delta z_{bimax}$$

Unsaturated condition

$$d_i \cdot (\Delta P_i)_{\text{surface layer}} = -(P_i)_{\text{surface layer}} \cdot \Delta z_{bi} + \Delta t \cdot D_i$$

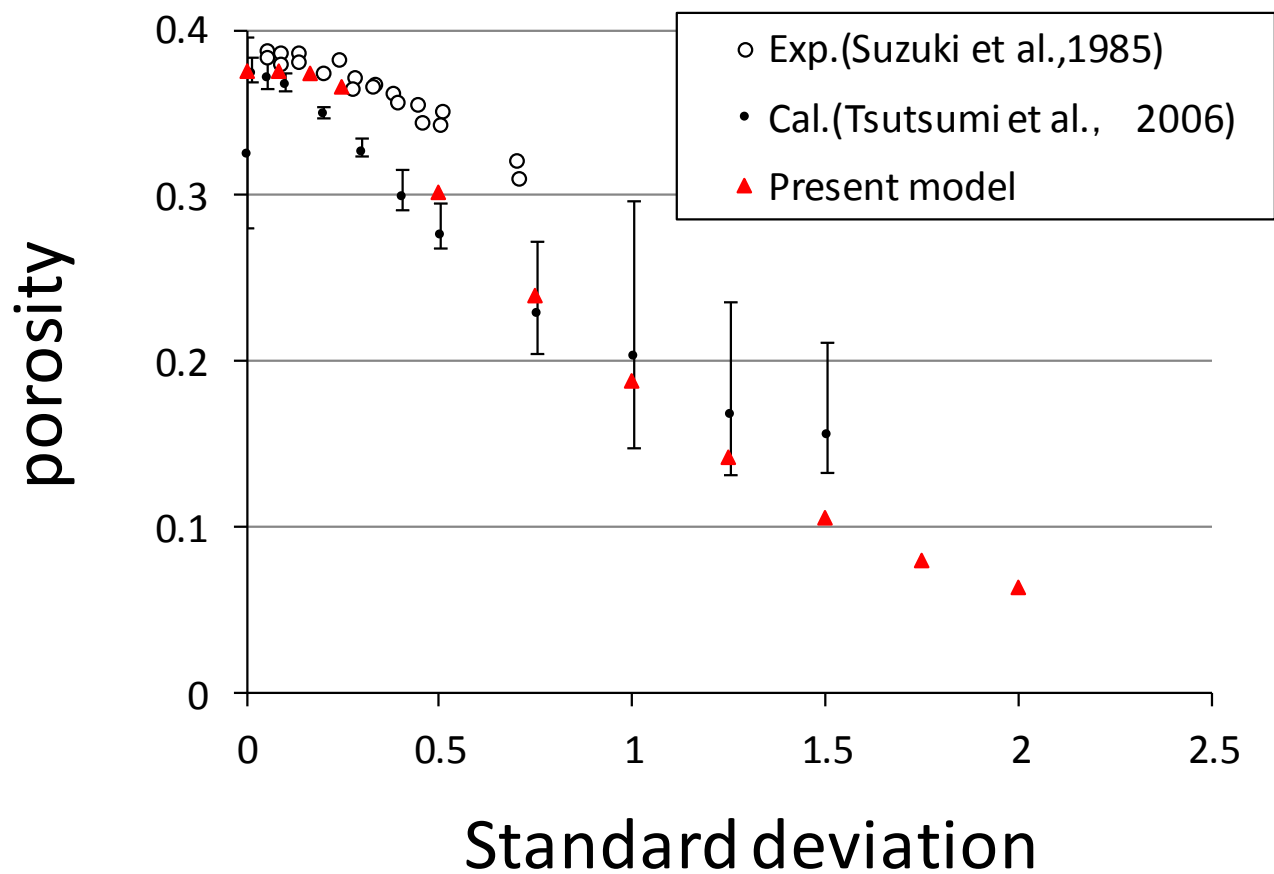
$$d_i \cdot (\Delta P_i)_{\text{deposition layer}} = \left\{ (P_i)_{\text{surface layer}} - (P_i)_{\text{deposition layer}} \right\} \Delta z_{bi}$$

Saturated condition

$$\Delta t \cdot D'_i = \max \left\{ 0, d_i (P_i)_{\text{surface layer}} + \Delta t \cdot D_i - d_i \lambda_i (1 - \lambda_0) \right\}$$

$$\Delta z_{bi} = \frac{\Delta t \cdot D'_i}{\lambda_i (1 - \lambda_0)}, \quad \Delta z_{bj} \geq \Delta z_{bi}$$

多粒径球形粒子群への適用





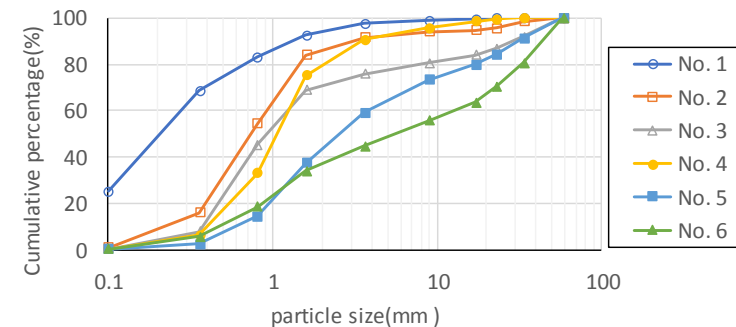
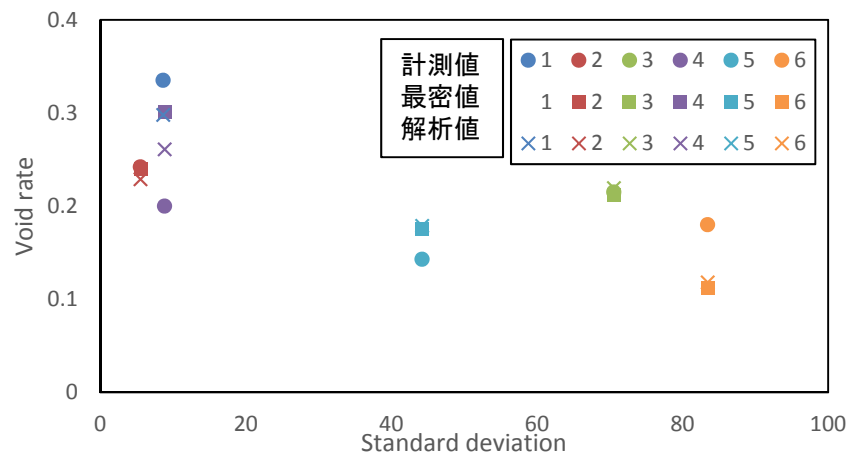
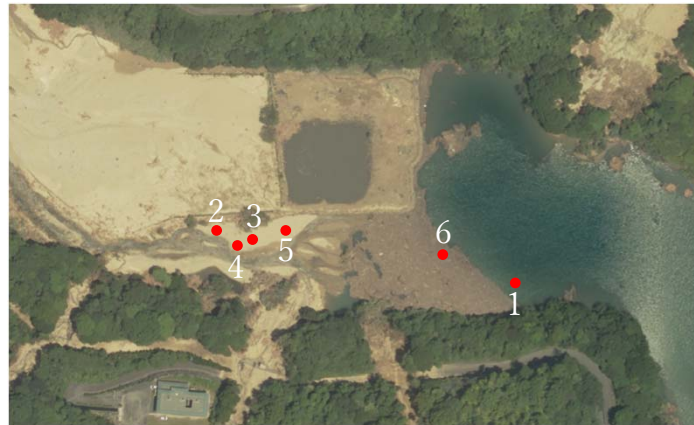
現地堆積土砂への適用



Sample No.	d_{50} (mm)	d_{84} (mm)	d_{84}/d_{16}	λ_n	λ_a	λ_{cal}
1	0.15	0.55	8.63	0.34	0.32	0.30
2	0.46	1.00	5.51	0.24	0.24	0.23
3	0.60	17.64	70.76	0.22	0.21	0.22
4	0.70	2.63	8.82	0.20	0.30	0.26
5	2.68	23.56	44.21	0.14	0.18	0.18
6	6.47	36.63	83.43	0.18	0.11	0.12

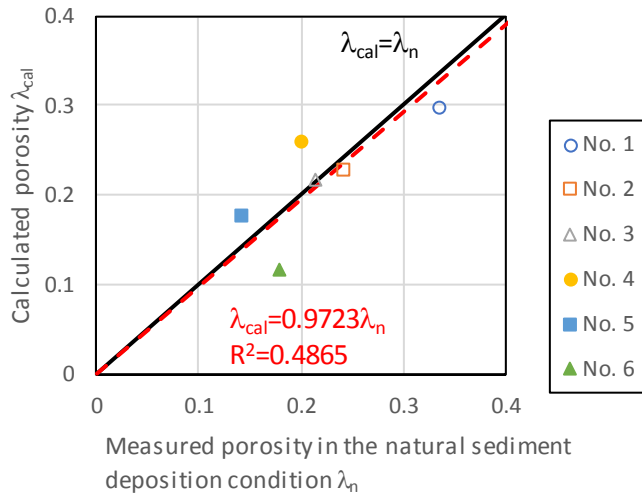
Sediment diameters d_{50} , d_{84} , and d_{16} were calculated from the nominal diameter using $d_n = d_s/0.93$ with the sieve diameters. λ_n and λ_a are the porosities in the natural sediment deposition in the Norogawa Dam reservoir and artificial closest packing condition created in the laboratory using sediment samples, respectively; λ_{cal} is the porosity calculated using the present model.

野呂川ダムにおける堆積土 (土石流堆積土)

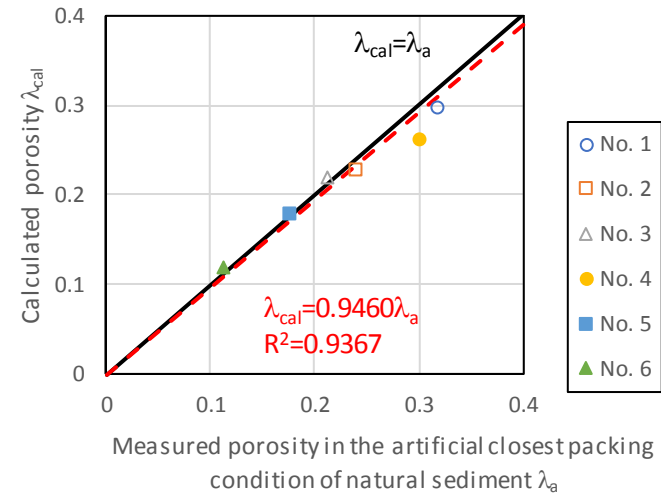


It is difficult to estimate sediment porosity from the standard deviation because of the variety of sediment distribution

現地堆積土と最密充填結果との比較

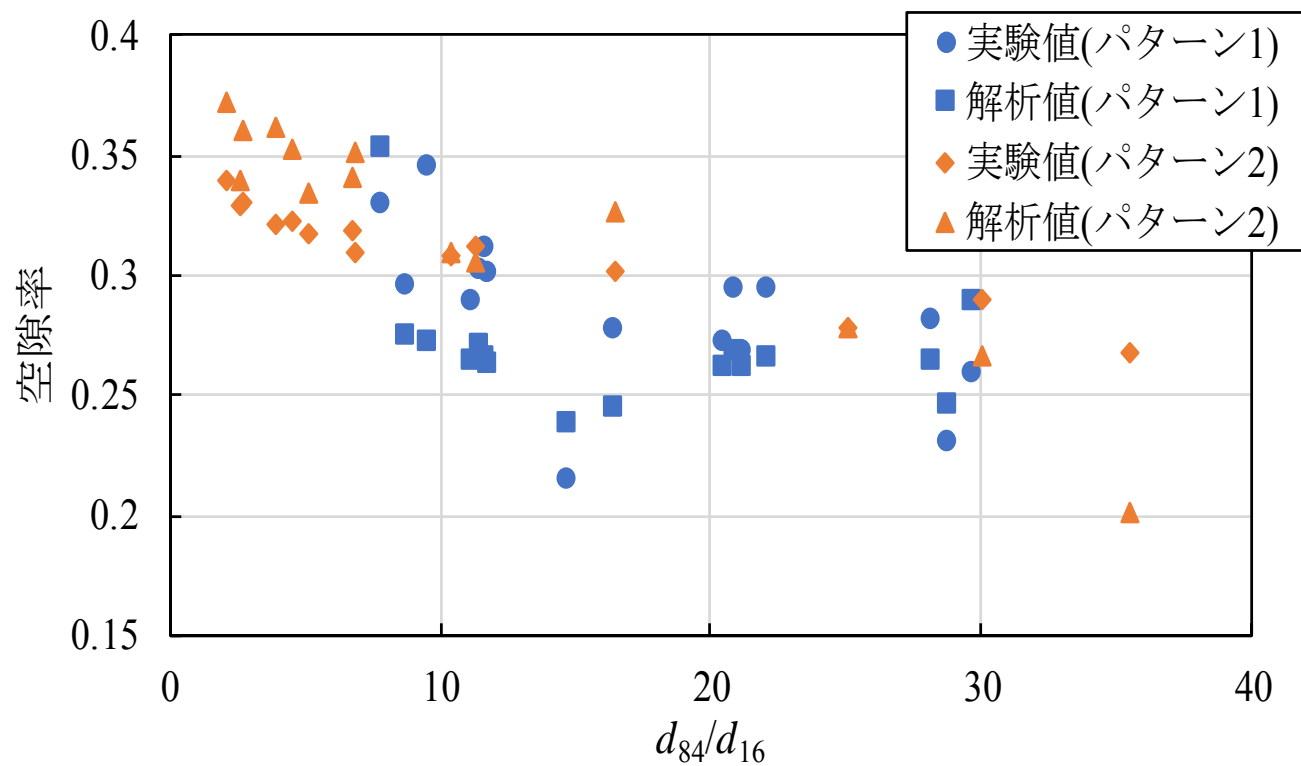


現地堆積土

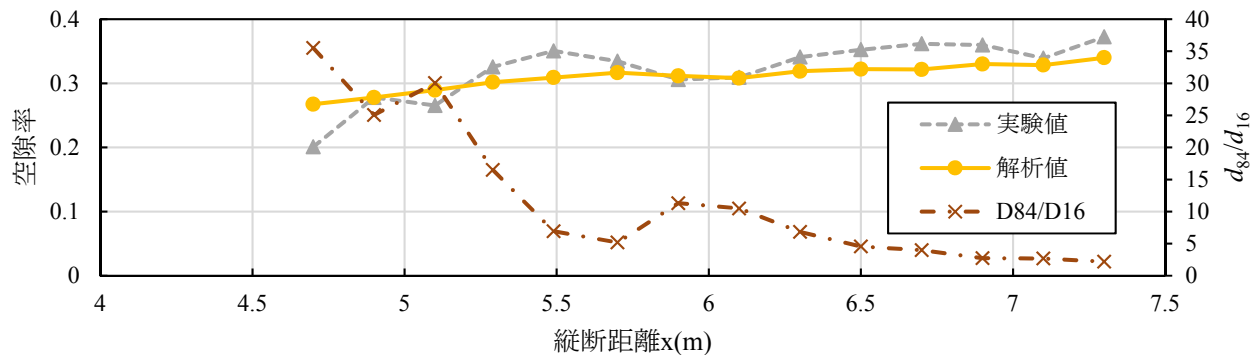
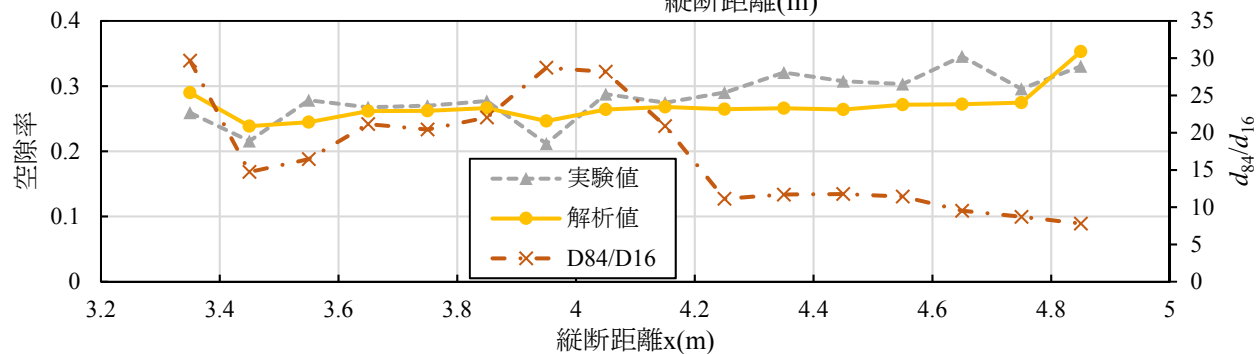
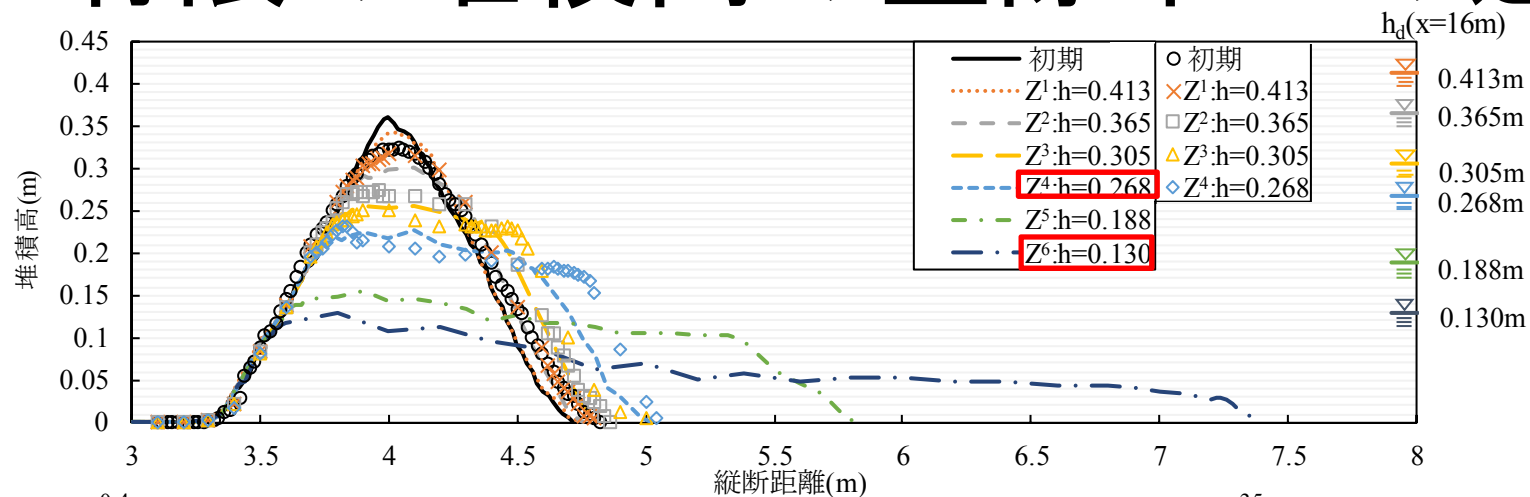


実験室における最密実験結果との比較

標準偏差と空隙率の関係



有限の堆積高の空隙率への適用



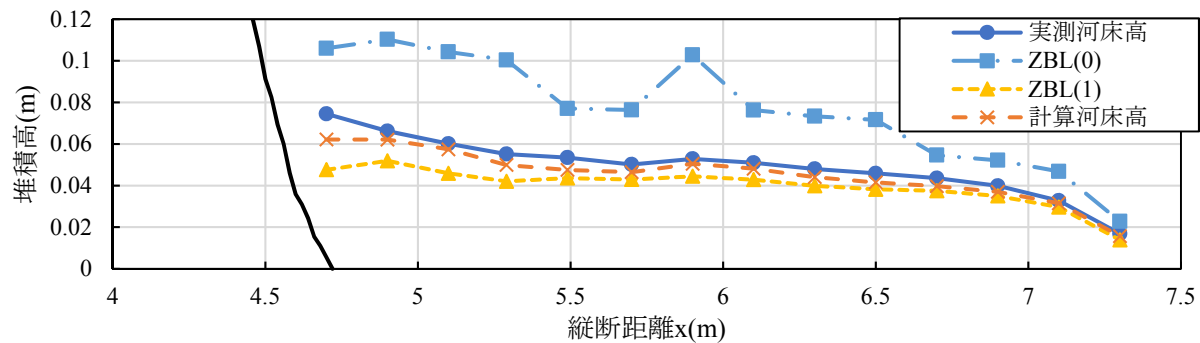
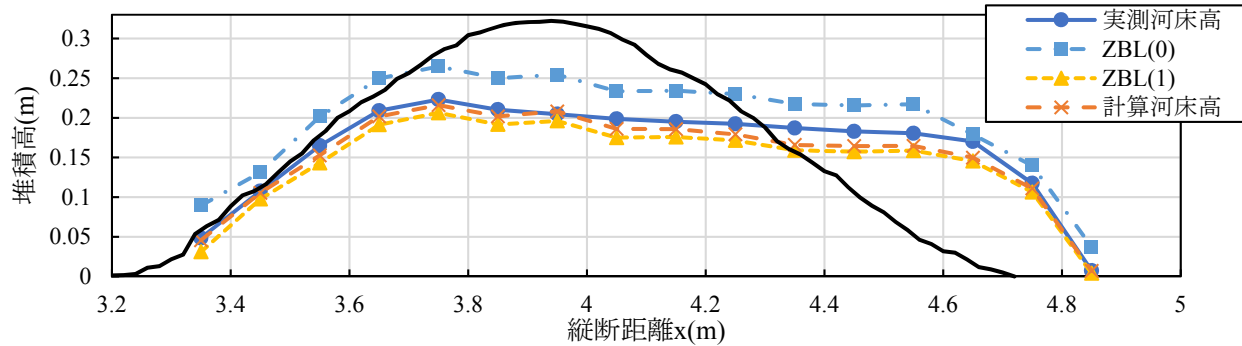
河床高の評価方法と実験結果との比較

$$z_{cal} = d_{imax} \frac{1 - \lambda_s}{1 - \lambda_d} + z_b$$

ZBL(0): 全体の解析層の表層表面高

ZBL(1): 全体の解析層の堆積層表面高(表層下面高)

ZBL(0) - ZBL(1): 各点の最大粒径



まとめ

侵入可能空隙率 λ_i (available porosity) の導入し, 粒子の堆積高の時間変化を定式化した.

二粒径粒子の堆積問題に対し, 細粒子の侵入可能空隙率 λ_i (available porosity) を定式化し, 二粒径の粒径粒子群の充填実験を再現できることを示した.

本研究の範囲では, 現地河床材料の形は粒径に依存しておらず, 一様粒径の空隙率を与えれば, 球で定めた係数を用いた二粒径充填モデルは現地河床材料を用いた二粒径充填実験結果を再現した.

二粒径充填モデルを多粒径で構成される球形群や混合粒径土砂へ堆積モデルに拡張した. 二粒径充填モデルで定めた係数を変えことなく, 空隙率を精度よく定めることができることを示した.

本堆積モデルを有限厚さの場合への適用し, 有限堆積高の場合も空隙率が適切に評価できることを示した. また, 計算における河床高の評価方法を示し, 実験の河床高を再現できることを示した.

参考文献

Uchida, T., Kawahara, Y., Hayashi, Y., and Tateishi, A.: Eulerian deposition model for sediment mixture in gravel-bed rivers with broad particle size distributions, Journal of Hydraulic Engineering, Vol 146, Issue 10, 2020.

10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001783

林 勇輔, 内田龍彦, 河原能久: 分級作用に伴う混合粒径土砂の空隙率と体積の変化に関する基礎的研究, 土木学会論文集B1(水工学), Vol.75, I_913-918, 2019.