

ブシネスク方程式を用いた 砂堆・反砂堆の数値シミュレーション

京都大学 音田 慎一郎

1. 砂堆・反砂堆の形成

- 河床には水理条件に応じて種々の河床波が発生

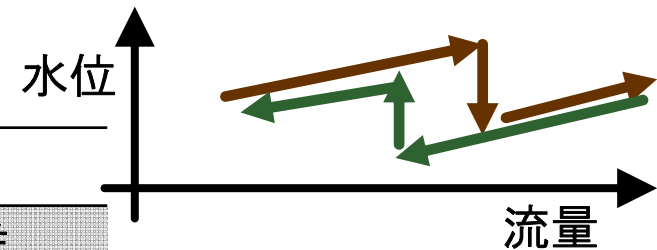
- ◆ 小規模河床波
(砂蓮・砂堆・反砂堆)
- ◆ 中規模河床波
(砂州)



- 流れの抵抗が変化

-洪水時において-

流量	小	大	小
河床形態	砂堆	消滅 (平坦)	砂堆



- 流れのモデル・土砂輸送モデル：

- ◆ ブシネスク方程式（鉛直加速度を考慮した水深積分モデル）
- ◆ 流速分布の変化を考慮して底面せん断応力の評価
- ◆ 非平衡流砂モデル

- ポテンシャル流解析；

J.F. Kennedy: The mechanics of dunes and antidunes in erodible channels, Journal of Fluid Mechanics, 16(4), 1963.

H. Nakagawa & T. Tsujimoto: Sand bed instability due to bed load motion, Proc. ASCE, 106, Hy12, 1980.

- 水深積分モデル（内田: 水工(2013)）

- 鉛直2次元のRANS, LES（S. Giri, 清水, 山口ら: WRR(2006, 2009), 水工(2009, 2013), J.C. Wells: 水工(2009), Y.J. Chou & O.B. Fringer: JGR(2010), S.L.Niemannら: JHE(2011), S.J.M.H. Hulscherら: JHE(2017)）

- 河床の粒子追跡（関根: 土論(2001), M. Nabi: WRR(2013), A.G. Kidanemariam & M. Uhlmann: JFM(2014), F. Sotiropoulos & A. Khosronejad: PF(2016)）

2. ブシネスク方程式

- 波・流れの共存場を時間発展的に予測する 水深積分モデル
 - ◆ 波浪
 - ◆ 波状跳水
 - ◆ 砂堆の発生・発達過程
- 波状路床上流れの 底面せん断応力分布 を再現できない
- 河床波上の流れを精度よく予測するため、 流速分布・圧力分布の変化 を組み込む

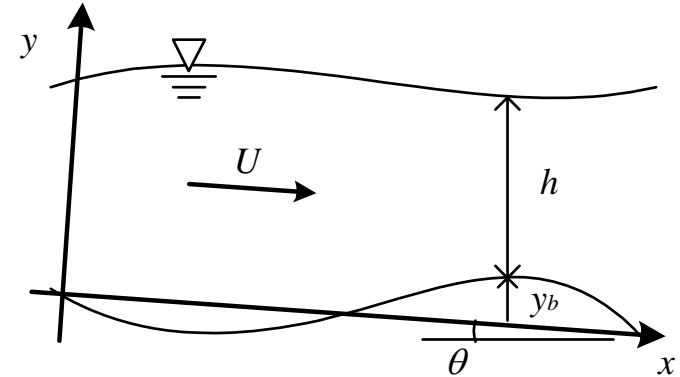
● 非定常ブシネスク方程式の誘導過程

1. 流速分布一様性の仮定

$$u = U(x)$$

2. 連続式に代入し，水深方向に積分

$$v = nA + B \quad n = \frac{(y - y_b)}{h}, \quad A = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x}, \quad B = U \frac{\partial y_b}{\partial x}$$



3. 鉛直方向の運動方程式に代入し，水深方向に積分してpを導出

$$\frac{p}{\rho} = g \cos \theta (h + y_b - y) + \frac{1}{2} h \frac{\partial A}{\partial t} (1 - n^2) + h \frac{\partial B}{\partial t} (1 - n) + \frac{1}{2} U h \frac{\partial A}{\partial x} (1 - n^2) + U h \frac{\partial B}{\partial x} (1 - n)$$

4. 水平方向の運動方程式に代入し，水深方向に積分

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial Uq}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_b \frac{\partial y_b}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\overline{u'^2} h \right)$$

$$P = \frac{gh^2}{2} \cos \theta + \frac{1}{3} h \left\{ -h \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + 2hU \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + hU^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - U \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} - U^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} h \left\{ hU^2 \frac{\partial^2 y_b}{\partial x^2} - U \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} - U^2 \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \quad \text{形状抵抗}$$

$$\left(\frac{p}{\rho} \right)_b = gh \cos \theta + \frac{1}{2} \left\{ -h \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + 2hU \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + hU^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - U \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} - U^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$+ \left\{ hU^2 \frac{\partial^2 y_b}{\partial x^2} - U \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} - U^2 \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right\}$$

$$-\overline{u'^2} = D \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha h U \frac{\partial U}{\partial x}$$

非定常ブシネスク方程式では，単位幅流量 q の時間微分が含まれるため，**陰的**に解く。

● 底面せん断応力の評価 -小規模河床波の発生過程に関する不安定解析-

小規模河床波の発生過程を説明するには、

- ◆ 路床近傍の流速と流砂量の位相差を導入することが必要
- ◆ 流速と底面せん断応力の位相差は局所流速に加速・減速効果の考慮することで評価できる

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = fu_b^2 \left(1 - \Gamma \frac{dh}{dx} + \Delta \frac{dy_b}{dx} \right) \quad \Gamma = 2, \Delta = 1$$

(路床近傍の流速)

$$u_b = \frac{q}{h} + \frac{q}{3h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{q}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial y_b}{\partial x} - \frac{q}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{q}{2} \frac{\partial^2 y_b}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial y_b}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{h}{6} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}$$

波状路床上流れの実験結果との比較

細田 尚, 村本嘉雄, 宮本雅章: 水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集, No. 558/11-38, 81-89, 1997

3. 非平衡流砂モデル

- 河床面から砂粒が単位時間に離脱する確率 (**pick-up rate**) と動き始めた砂粒が停止するまでの移動距離 (**step length**) を用いて確率的に表現するモデル

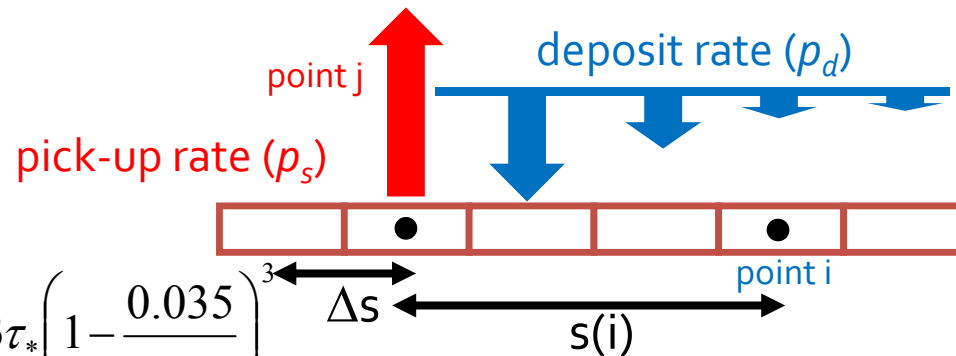
$$\frac{\partial y_b}{\partial t} = \frac{1}{1-\lambda} \frac{A_3}{A_2} d(p_d - p_s)$$

p_s : pick-up rate, p_d : deposit rate

$f_s(s(i))$: step length の確率密度関数

$$f_s(s(i)) = \frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{s(i)}{\Lambda}\right) \quad s(i) = i \cdot \Delta s$$

Λ : 平均step length ($=\alpha d$)



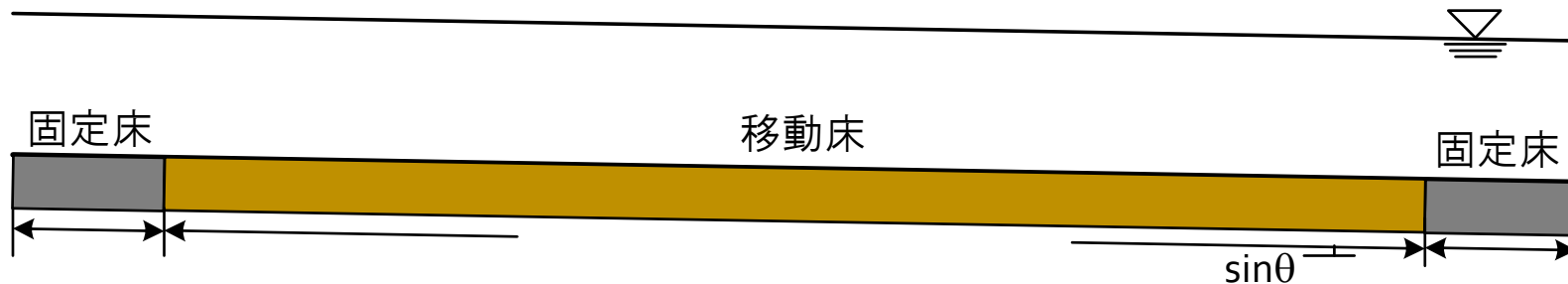
$$p_{d(j,i)} = p_{s(j)} f_s(s(i)) \Delta s$$

$$p_s \sqrt{\frac{d}{(\sigma/\rho - 1)g}} = 0.03 \tau_* \left(1 - \frac{0.035}{\tau_*}\right)^3$$

4. 数値解析法

-計算条件-

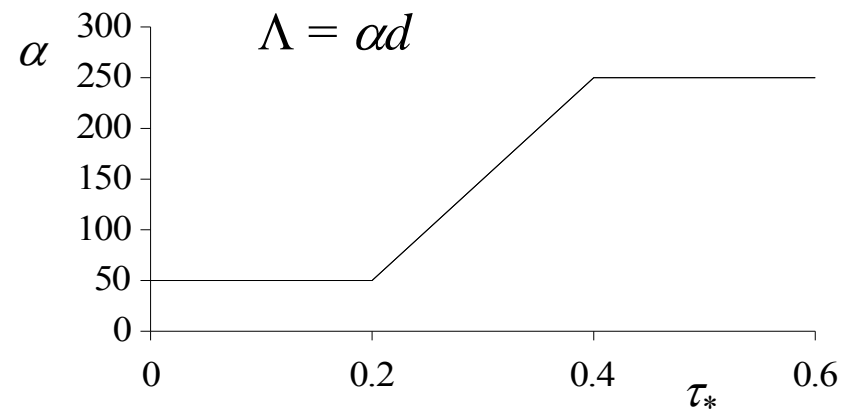
- ◆ 上流端：流量
- ◆ 下流端：等流水深
- ◆ 移流項には1次精度の風上差分
- ◆ 跳水を再現するため、水深勾配が大きくなると、鉛直加速度項に**減衰関数**を乗じる
- ◆ 移動床部の平均勾配が大幅に変化しないように、固定床下流側から土砂をpick-upさせ給砂を行い、路床変動計算後、河床高を0にする



- step lengthの取り扱い

- ◆ step lengthは粒径の**50~250**倍
- ◆ 定常条件下でも砂堆の発達に伴って平均step lengthが変化する
- ◆ step lengthの値によって砂堆の波高・波長が異なる

流量 (無次元掃流力)	小	大
step length	短い	長い



- 定常流での砂堆・反砂堆形成過程

- ◆ step lengthは粒径の100倍
- ◆ 粒径と勾配を変化させる
- ◆ 長さ8mの水路に流量 $200\text{cm}^3/\text{s}/\text{cm}$ を流す

Case	d (cm)	sin θ	Case	d (cm)	sin θ
D1	0.030	1/500	A1	0.030	1/40
D2	0.040	1/500	A2	0.040	1/40
D3	0.045	1/500	A3	0.045	1/40
D4	0.050	1/500	A4	0.030	1/50
D5	0.040	1/750	A5	0.040	1/50
D6	0.045	1/750	A6	0.045	1/50
D7	0.030	1/1000	A7	0.050	1/500
D8	0.040	1/1000			
D9	0.045	1/1000			
D10	0.050	1/1000			

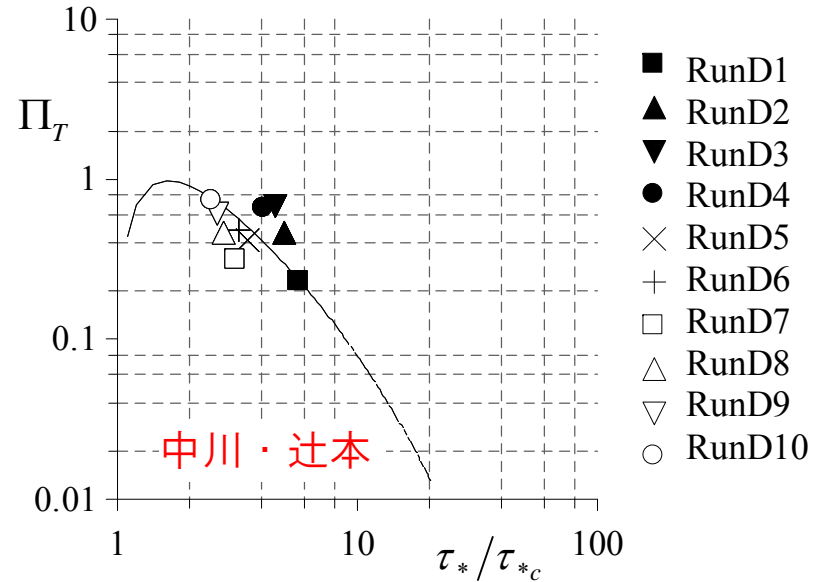
● 計算結果の基本的特性（砂堆）

Case	h (cm)	L (cm)
D1	7.4	42.3
D2	7.1	50.0
D3	6.7	47.0
D4	6.2	58.8
D5	7.4	37.4
D6	7.1	48.0
D7	8.0	32.2
D8	7.8	52.0
D9	7.7	54.4
D10	7.6	46.7

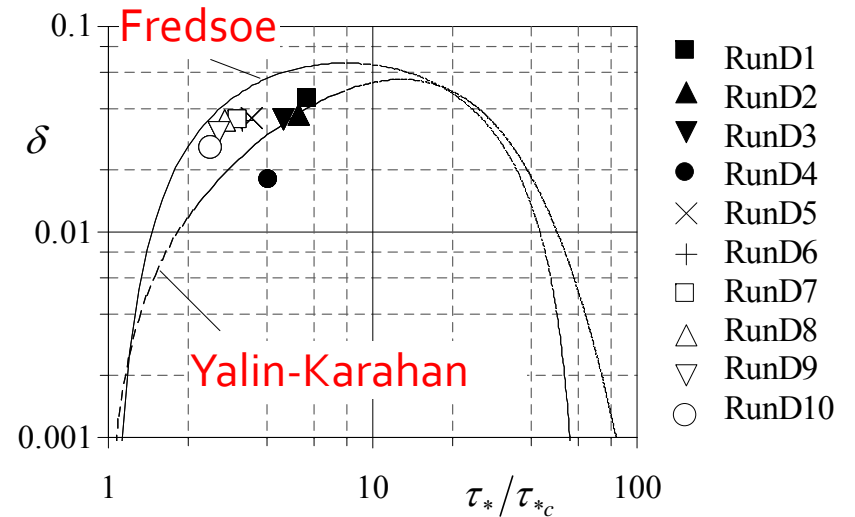
L = 5h for dunes (Yalin)

duneの発達時間スケール

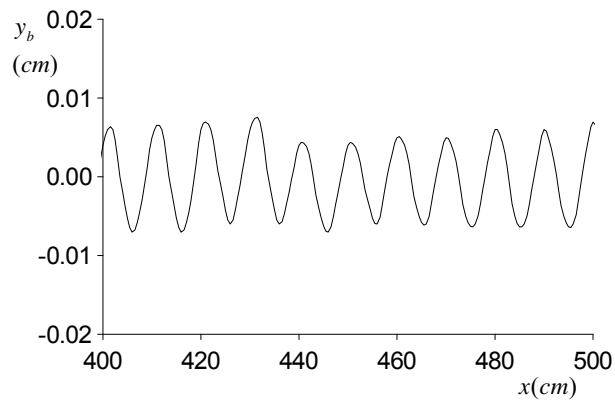
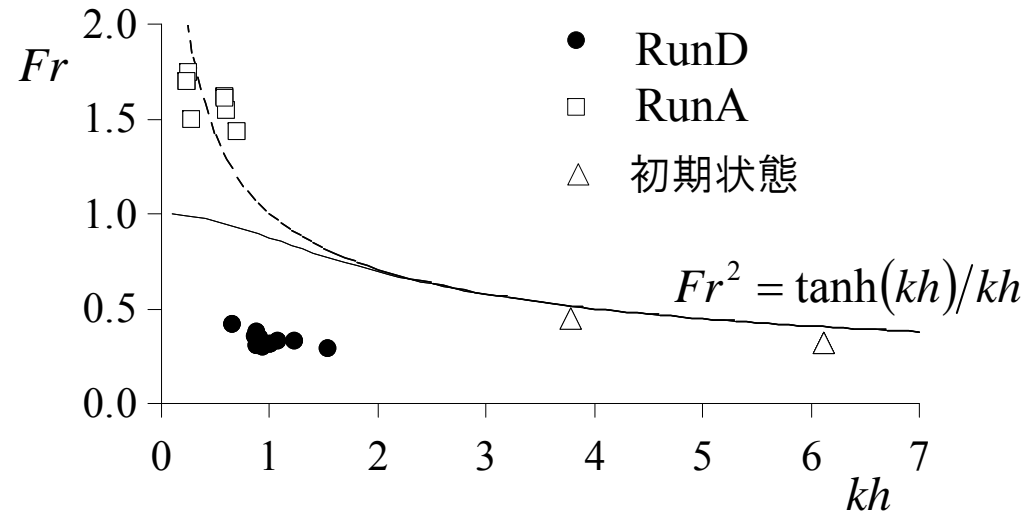
$$\Pi_T \equiv \left\{ T_D \sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd/h} \right\} (d/h) (\tau_{*c})^{3/2}$$



duneの波形勾配

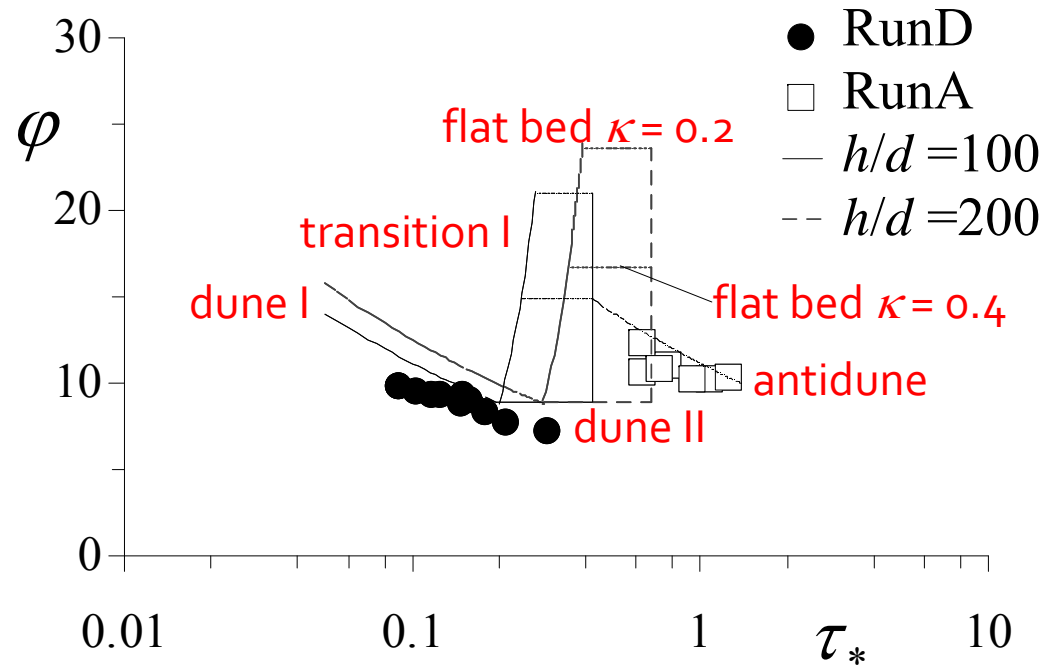


- 無次元波数 kh と Fr による領域区分



水面波と河床波の共鳴関係を満足する河床波の波長に一致する

● 流れの抵抗特性 ($\varphi=U/u_*$)



(岸 & 黒木)

dune I $\varphi = 2.4(h/d)^{1/6} \tau_*^{-1/3}$

flat bed $\varphi = 6.9(\kappa_0/\kappa)^{1/2} (h/d)^{1/6}$

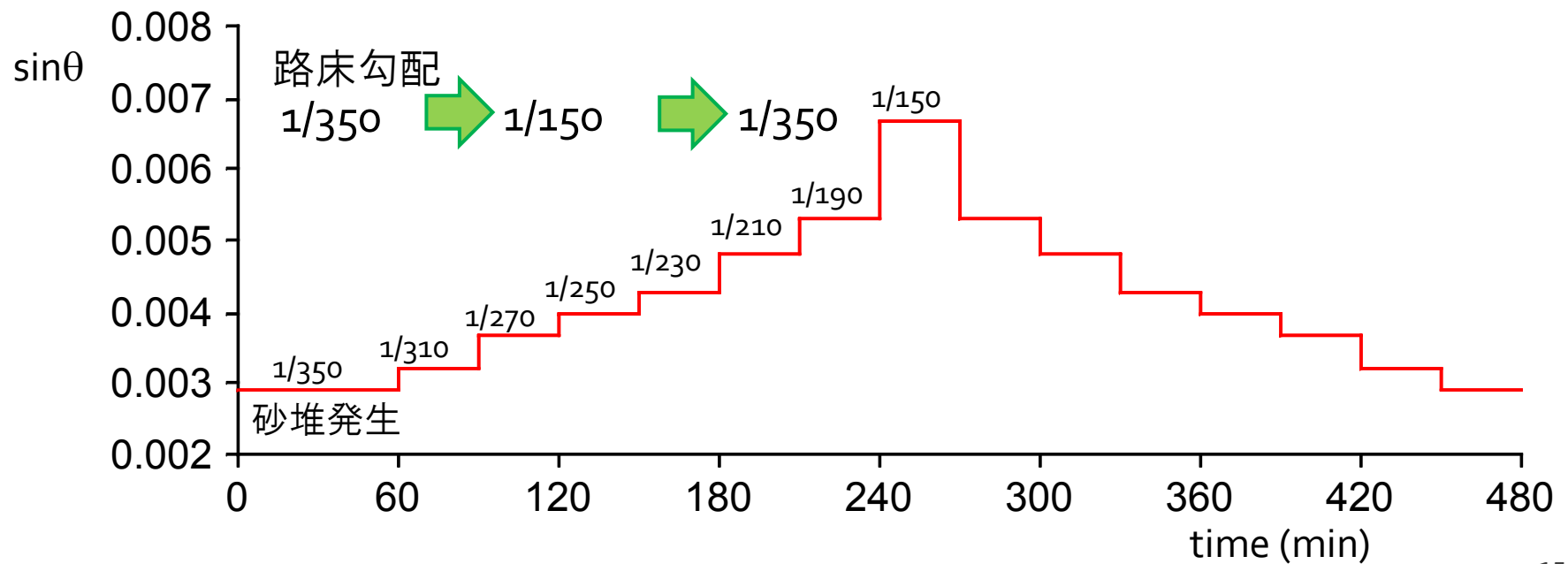
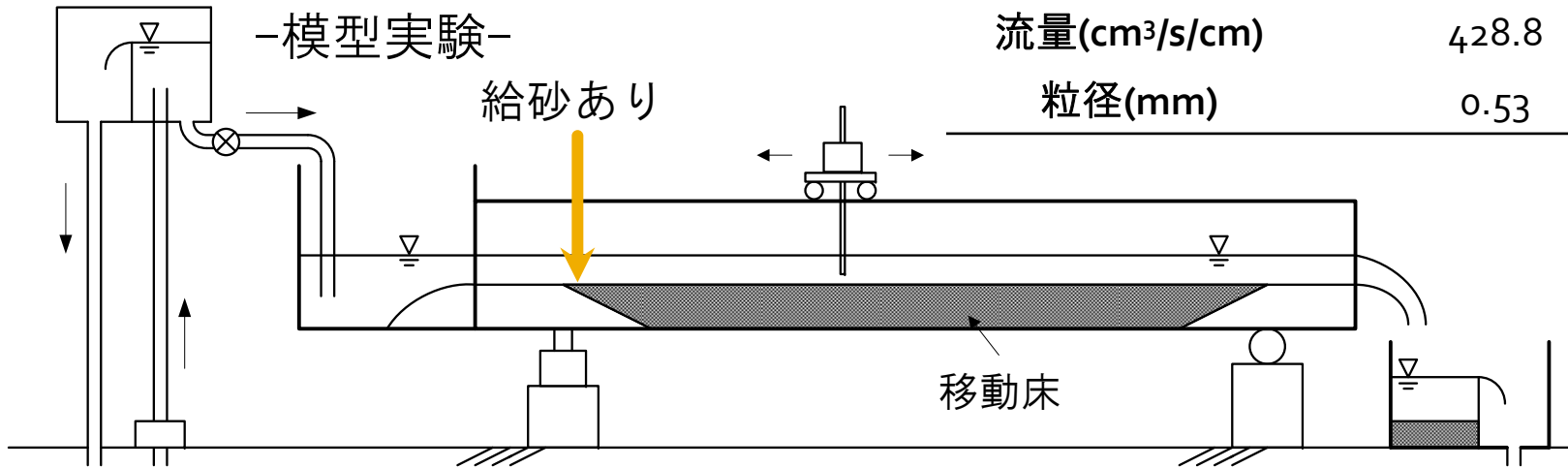
dune II $\varphi = 8.9$

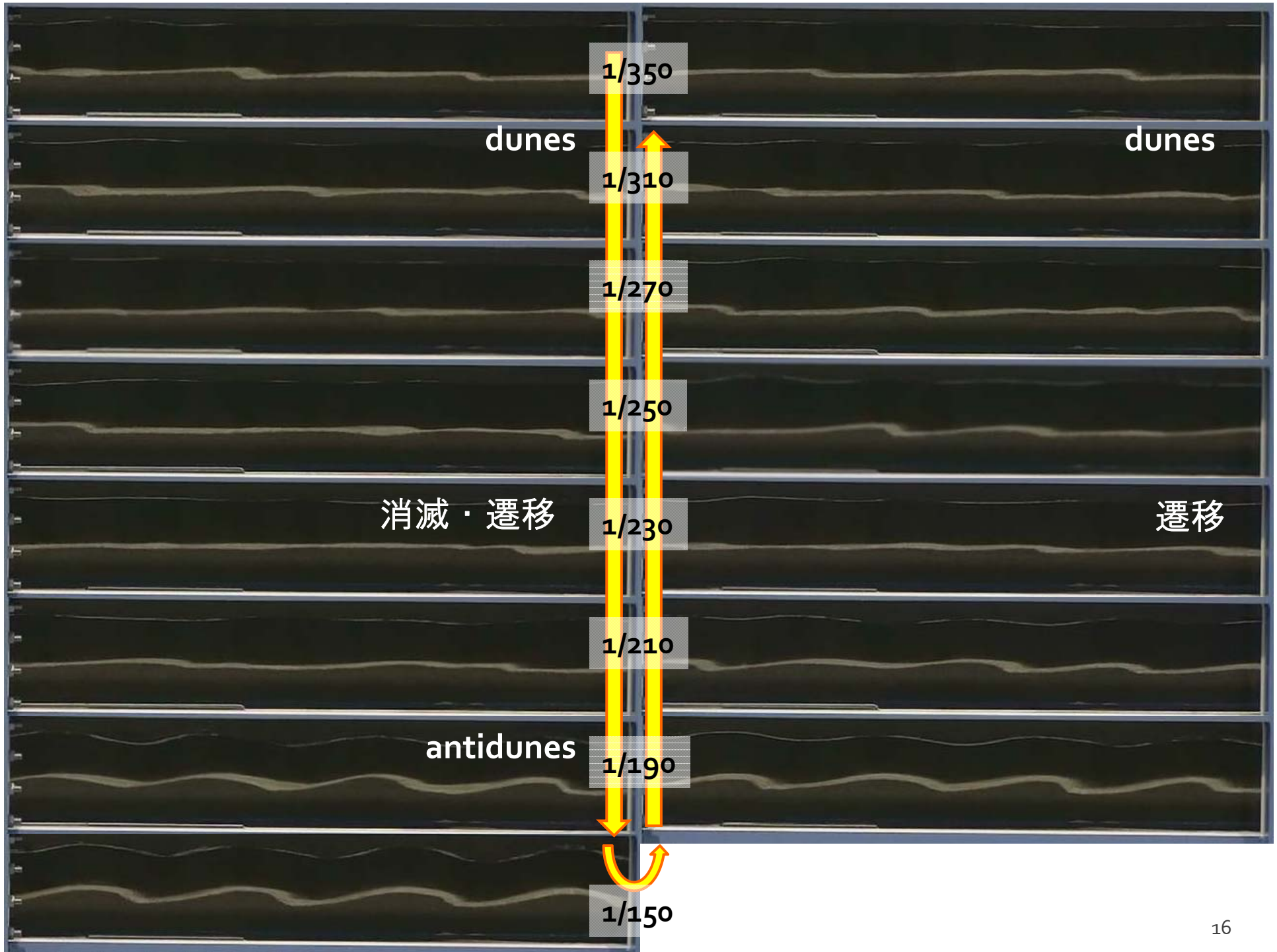
antidune $\varphi = 2.8(h/d)^{3/10} \tau_*^{-1/3}$

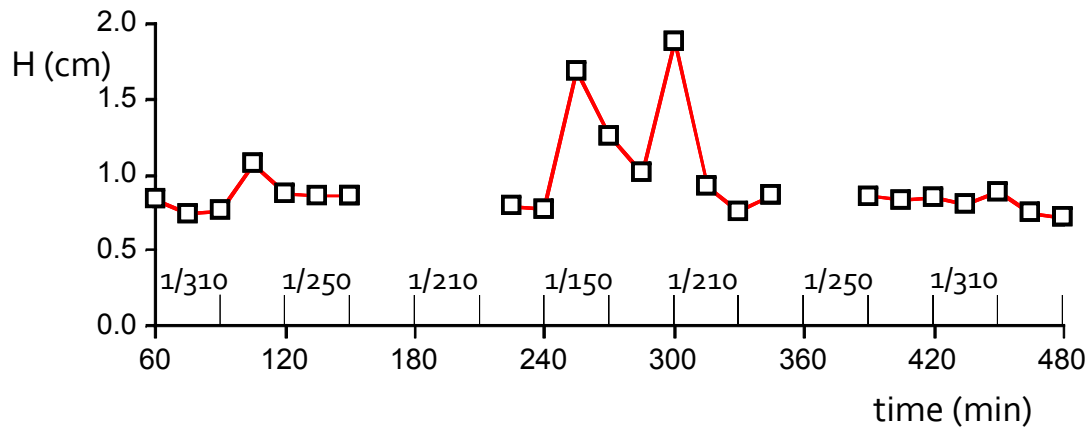
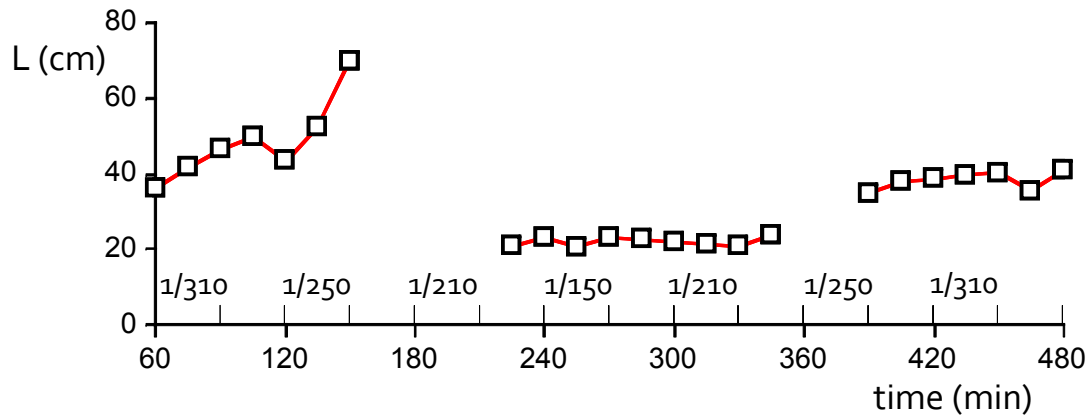
transition I $\varphi = 1.1 \times 10^6 (h/d)^{-3/2} \tau_*^3$

● 河床波の遷移過程

長さ(m)	8.0
幅(m)	0.1
移動床厚(cm)	6.0
流量(cm ³ /s/cm)	428.8
粒径(mm)	0.53

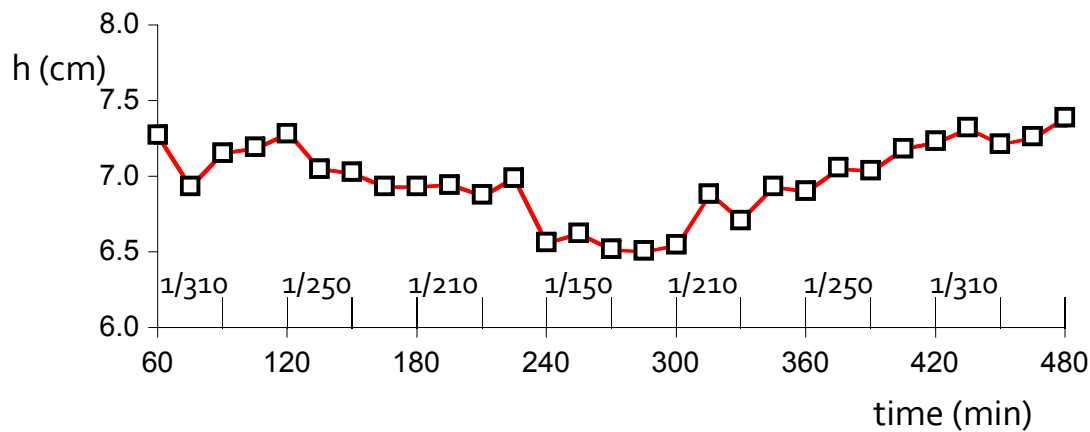






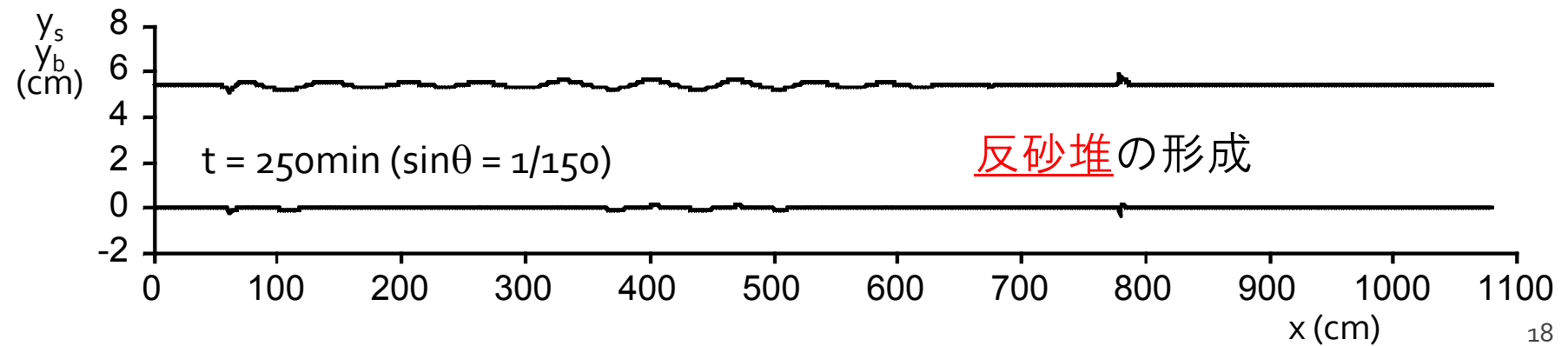
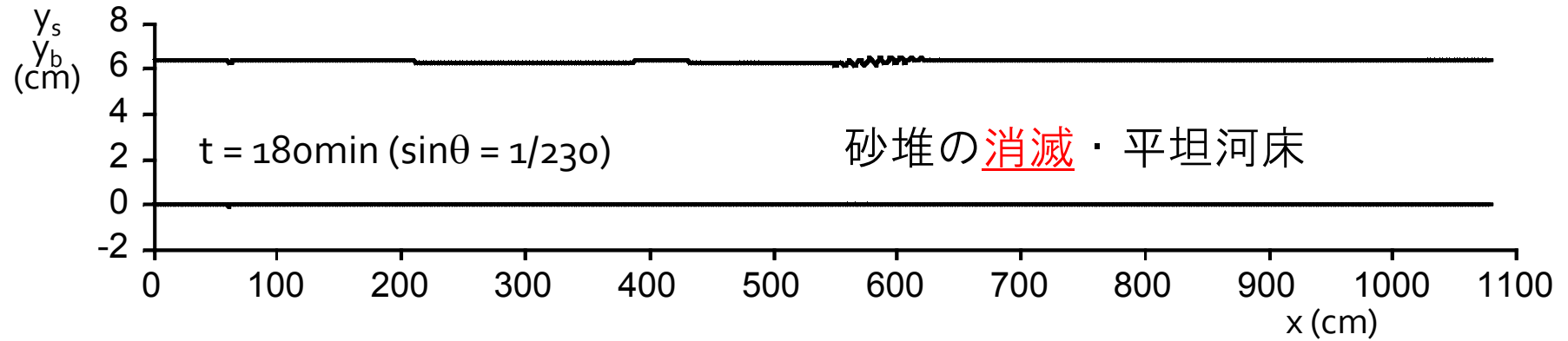
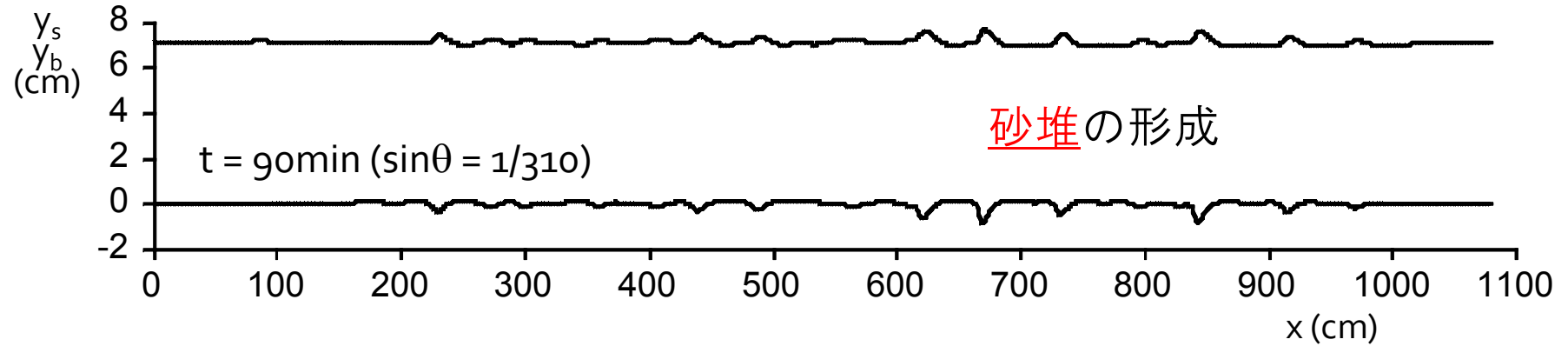
波長の増加・波高の減衰とともに
砂堆の消滅が確認できる。

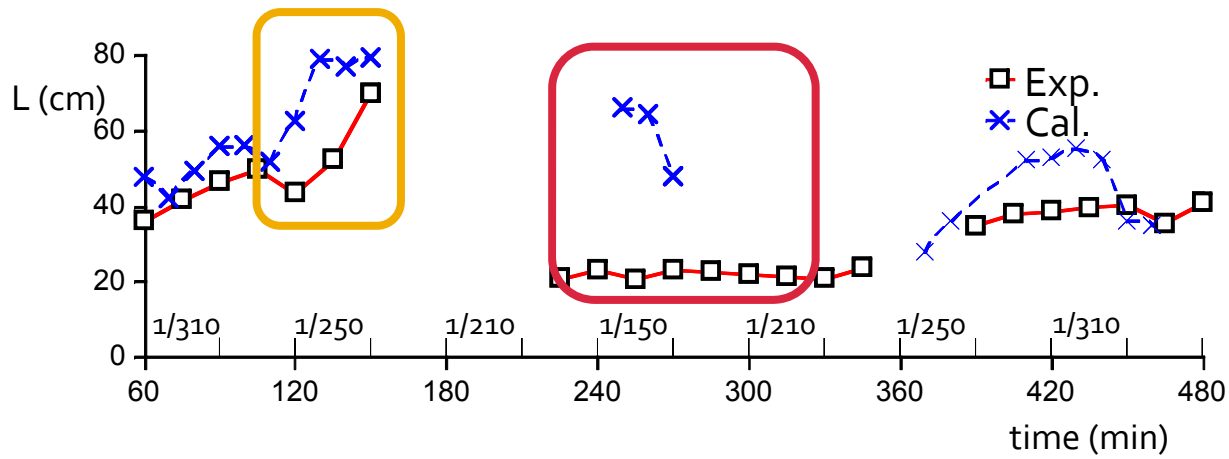
同じ勾配の時を比較すると、勾配
上昇時の水深は減少時の水深より
高い。非対称性・ヒステリシスが
確認できる。



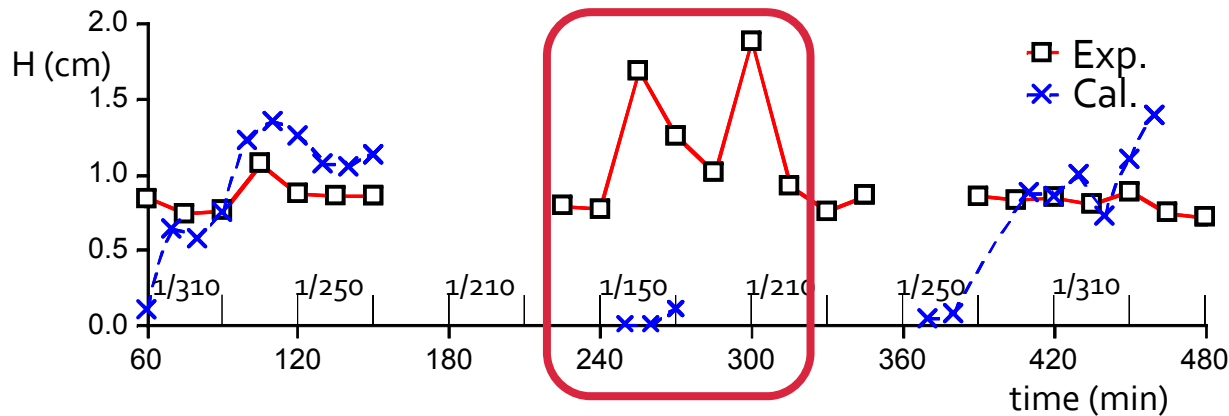
-シミュレーション-

水面と河床面の時間変化



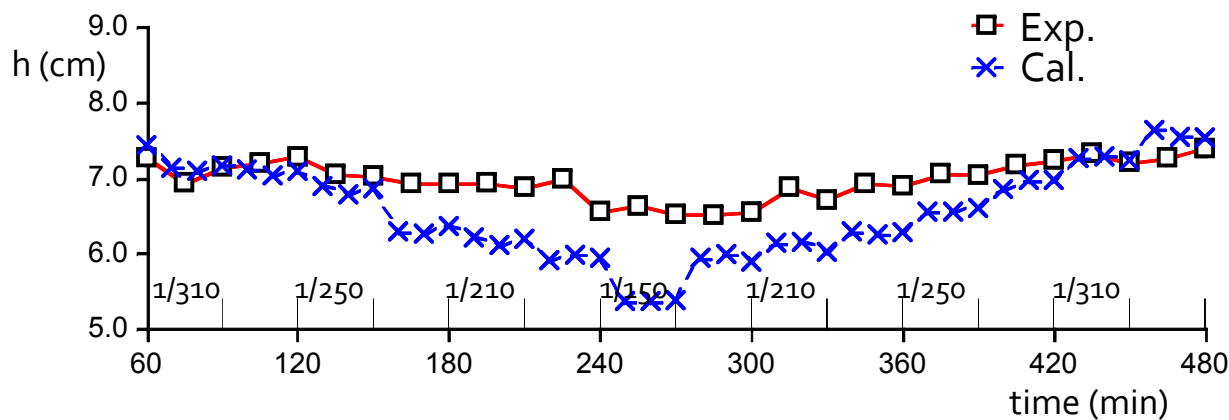


波長の増加が確認できる。



反砂堆の形状は再現できていない。

1/250では2つの河床形態が存在。



数値解析では**完全に平坦河床**となり、反砂堆が発生するまで時間が必要。

- 三角波（反砂堆）

	Run7	Run12	
B (m)	0.5	1.0	0.5
d (mm)	5.00	5.00	5.00
$\sin\theta$	0.018	0.015	0.018
Q (l/s)	42.90	113.3	60.0
h (m)	0.075	0.09	
Fr	1.34	1.34	
水面波列	1	1	

- ◆ $\Delta x = 0.025(\text{m})$
- ◆ step lengthは粒径の50倍

- 水面波の波長・波高の比較

	Run7	Run12
Exp		
波長(cm)	55.0	68.3
波高(cm)	7.5	11.6
Cal		
波長(cm)	77.6	90.0
波高(cm)	4.5	4.0

- ◆ 波長は概ね再現できているが、波高は小さい。
- ◆ 鉛直加速度項に乗じた減衰関数が影響している。

5. まとめ

- **ブシネスク方程式**と**非平衡流砂モデル**を組み合わせ、砂堆・反砂堆の形成・遷移過程に関する数値シミュレーションを行った。
- 砂堆の消滅から反砂堆の形成過程についての再現性が十分ではないが、概ね再現できることを示した。
- 平面2次元への拡張を行っている。

参考文献

- 音田慎一郎, 細田 尚, 木村一郎: 加速・減速流の流速分布に関する簡易モデルとその水深積分モデルへの適用について, 土木学会水工学論文集, 第47巻, pp. 511-516, 2003.
- 音田慎一郎, 細田 尚: 水深積分モデルによる小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析, 土木学会水工学論文集, 第48巻, pp. 973-978, 2004.
- 音田慎一郎, 細田 尚: 水深積分モデルによる非定常条件下での砂堆の遷移過程に関する数値シミュレーション, 土木学会水工学論文集, 第53巻, pp. 721-726, 2009.
- S. Onda, T. Hosoda and Y. Ishibashi: Numerical and experimental study of development and transition processes of dunes, Proceedings of IAHR-APD2010, Auckland, USB, 2010. 02.